

# Introducción a los algoritmos - 2do cuatrimestre 2015

## Axiomas y Teoremas del Cálculo de Predicados

### Notación

**N1** Rango True de  $\forall$ :

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: True : f.x \rangle$$

**N2** Anidado de  $\forall$ :

$$\langle \forall x, y :: f.x.y \rangle \equiv \langle \forall x :: \langle \forall y :: f.x.y \rangle \rangle$$

**N3** Rango True de  $\exists$ :

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: True : f.x \rangle$$

**N4** Anidado de  $\exists$ :

$$\langle \exists x, y :: f.x.y \rangle \equiv \langle \exists x :: \langle \exists y :: f.x.y \rangle \rangle$$

### Axiomas

**A0** Intercambio entre rango y término de  $\forall$ :

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: r.x \Rightarrow f.x \rangle$$

**A1** Regla de término de  $\forall$ :

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \wedge \langle \forall x :: g.x \rangle \equiv \langle \forall x :: f.x \wedge g.x \rangle$$

**A2** Distributividad de  $\vee$  con  $\forall$ :

$$X \vee \langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: X \vee f.x \rangle$$

si  $x$  no ocurre en  $X$

**A3** Rango unitario de  $\forall$ :

$$\langle \forall x : x = X : f.x \rangle \equiv f.X$$

si  $X$  distinta de  $x$

**A4** Definición de  $\exists$ :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \neg \langle \forall x : r.x : \neg f.x \rangle$$

**A5** Cambio de variable de  $\forall$ :

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall y :: f.y \rangle$$

si  $x$  no ocurre en  $f.y$

si  $y$  no ocurre en  $f.x$

### Teoremas Básicos de $\forall$

**T1** Generalización:

$$True \equiv \langle \forall x :: True \rangle \equiv \langle \exists x :: True \rangle$$

**T2** Partición de rango de  $\forall$ :

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

**T3** Instanciación:

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \Rightarrow f.Y$$

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: f.x \rangle \wedge f.Y$$

si  $Y$  no ocurre en  $f.x$

**T4** Intercambio  $\forall$ :

$$\langle \forall x :: \langle \forall y :: f.x.y \rangle \rangle \equiv \langle \forall y :: \langle \forall x :: f.x.y \rangle \rangle$$

**T5** Regla del término constante de  $\forall$ :

$$\langle \forall x :: C \rangle \equiv C$$

si  $x$  no ocurre en  $C$

**T6** Rango Vacío de  $\forall$ :

$$\langle \forall x : False : f.x \rangle \equiv True$$

**T7** Regla de término de  $\forall$  - bis:

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \wedge \langle \forall x : r.x : g.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x : f.x \wedge g.x \rangle$$

**T8** Distributividad de  $\vee$  con  $\forall$  - bis:

$$X \vee \langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x : X \vee f.x \rangle$$

si  $x$  no ocurre en  $X$

**T9** Cambio de variable de  $\forall$  - bis:

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall y : r.y : f.y \rangle$$

si  $x$  no ocurre en  $r.y$  y  $f.y$

si  $y$  no ocurre en  $r.x$  y  $f.x$

## Teoremas Básicos de $\exists$

**T10** Intercambio entre rango y término de  $\exists$ :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: r.x \wedge f.x \rangle$$

si  $X$  no ocurre en  $T.x$

**T11** Regla del término de  $\exists$ :

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \vee \langle \exists x :: g.x \rangle \equiv \langle \exists x :: f.x \vee g.x \rangle$$

**T12** Distributividad de  $\wedge$  con  $\exists$ :

$$X \wedge \langle \exists x :: f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: X \wedge f.x \rangle$$

si  $x$  no ocurre en  $X$

**T13** Rango unitario de  $\exists$ :

$$\langle \exists x : x = X : f.x \rangle \equiv f.X$$

**T14** Partición de rango de  $\exists$ :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \vee \langle \exists x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

**T15** Testigo:

$$f.Y \Rightarrow \langle \exists x :: f.x \rangle$$

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \equiv f.Y \vee \langle \exists x :: f.x \rangle$$

**T16** Cambio de variable de  $\exists$ :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists y : r.y : f.y \rangle$$

si  $x$  no ocurre en  $f.y$  ni  $y$  en  $f.x$

**T17** Regla del término constante de  $\exists$ :

$$\langle \exists x :: C \rangle \equiv C$$

si  $x$  no ocurre en  $C$

**T18** Rango Vacío de  $\exists$ :

$$\langle \forall x : False : f.x \rangle \equiv False$$