

Introducción a los algoritmos - 1er cuatrimestre 2015

Axiomas y Teoremas del Cálculo de Predicados

Notación

N1 Rango True de \forall :

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x : True : f.x \rangle$$

N2 Anidado de \forall :

$$\langle \forall x, y :: f.x.y \rangle \equiv \langle \forall x :: \langle \forall y :: f.x.y \rangle \rangle$$

N3 Rango True de \exists :

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \equiv \langle \exists x : True : f.x \rangle$$

N4 Anidado de \exists :

$$\langle \exists x, y :: f.x.y \rangle \equiv \langle \exists x :: \langle \exists y :: f.x.y \rangle \rangle$$

Axiomas

A0 Generalización:

$$True \equiv \langle \forall x :: True \rangle \equiv \langle \exists x :: True \rangle$$

A1 Intercambio entre rango y término de \forall :

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: r.x \Rightarrow f.x \rangle$$

A2 Regla de término de \forall :

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \wedge \langle \forall x :: g.x \rangle \equiv \langle \forall x :: f.x \wedge g.x \rangle$$

A3 Distributividad de \vee con \forall :

$$X \vee \langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: X \vee f.x \rangle$$

si x no ocurre en X

A4 Rango unitario de \forall :

$$\langle \forall x : x = X : f.x \rangle \equiv f.X$$

si X distinta de x

A5 Definición de \exists :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \neg \langle \forall x : r.x : \neg f.x \rangle$$

Teoremas Básicos de \forall

T1 Partición de rango de \forall :

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

T2 Instanciación:

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \Rightarrow f.Y$$

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: f.x \rangle \wedge f.Y$$

si Y no ocurre en $f.x$

T3 Cambio de variable de \forall :

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall y : r.y : f.y \rangle$$

si x no ocurre en $f.y$ ni y en $f.x$

T4 Intercambio \forall :

$$\langle \forall x :: \langle \forall y :: f.x.y \rangle \rangle \equiv \langle \forall y :: \langle \forall x :: f.x.y \rangle \rangle$$

T5 Regla del término constante de \forall :

$$\langle \forall x :: C \rangle \equiv C$$

si x no ocurre en C

T6 Rango Vacío de \forall :

$$\langle \forall x : False : f.x \rangle \equiv True$$

Teoremas Básicos de \exists

T7 Intercambio entre rango y término de \exists :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: r.x \wedge f.x \rangle$$

si X no ocurre en $T.x$

T8 Regla del término de \exists :

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \vee \langle \exists x :: g.x \rangle \equiv \langle \exists x :: f.x \vee g.x \rangle$$

T9 Distributividad de \wedge con \exists :

$$X \wedge \langle \exists x :: f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: X \wedge f.x \rangle$$

si x no ocurre en X

T10 Rango unitario de \exists :

$$\langle \exists x : x = X : f.x \rangle \equiv f.X$$

T11 Partición de rango de \exists :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \vee \langle \exists x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

T12 Testigo:

$$f.Y \Rightarrow \langle \exists x :: f.x \rangle$$

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \equiv f.Y \vee \langle \exists x :: f.x \rangle$$

T13 Cambio de variable de \exists :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists y : r.y : f.y \rangle$$

si x no ocurre en $f.y$ ni y en $f.x$

T14 Regla del término constante de \exists :

$$\langle \exists x :: C \rangle \equiv C$$

si x no ocurre en C

T15 Rango Vacío de \exists :

$$\langle \forall x : False : f.x \rangle \equiv False$$