

Introducción a los algoritmos - 2º cuatrimestre 2015

Axiomas y Teoremas del Cálculo Proposicional

Axiomas

A1 Asociatividad equivalencia:

$$((\square \equiv \circ) \equiv \diamond) \equiv (\square \equiv (\circ \equiv \diamond))$$

A2 Conmutatividad equivalencia:

$$\square \equiv \circ \equiv \circ \equiv \square$$

A3 Neutro equivalencia:

$$\square \equiv \text{True} \equiv \square$$

A4 Definición de Negación:

$$\neg(\square \equiv \circ) \equiv \neg\square \equiv \circ$$

A5 Definición de False:

$$\text{False} \equiv \neg\text{True}$$

A6 Definición de discrepancia:

$$\square \neq \circ \equiv \neg(\square \equiv \circ)$$

A7 Asociatividad disyunción:

$$(\square \vee \circ) \vee \diamond \equiv \square \vee (\circ \vee \diamond)$$

A8 Conmutatividad disyunción:

$$\square \vee \circ \equiv \circ \vee \square$$

A9 Idempotencia disyunción:

$$\square \vee \square \equiv \square$$

A10 Distributividad disyunción con equivalencia:

$$\square \vee (\circ \equiv \diamond) \equiv (\square \vee \circ) \equiv (\square \vee \diamond)$$

A11 Tercero excluido:

$$\square \vee \neg\square$$

A12 Regla dorada:

$$\square \wedge \circ \equiv \square \equiv \circ \equiv \square \vee \circ$$

A13 Definición de implicación:

$$\square \Rightarrow \circ \equiv \square \vee \circ \equiv \circ$$

A14 Definición de consecuencia:

$$\square \Leftarrow \circ \equiv \square \vee \circ \equiv \square$$

Teoremas Básicos

T1 Metateorema de True:

Si \square está demostrado, $\square \equiv \text{True}$

T2 Doble negación:

$$\neg\neg\square \equiv \square$$

T3 Equivalencia y negación:

$$\square \equiv \text{False} \equiv \neg\square$$

T4 Elemento absorbente de la disyunción:

$$\square \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

T5 Elemento neutro de la disyunción:

$$\square \vee \text{False} \equiv \square$$

T6 Teorema (*):

$$\square \vee \circ \equiv \square \vee \neg\circ \equiv \square$$

T7 Caracterización de implicación:

$$\square \Rightarrow \circ \equiv \neg\square \vee \circ$$

Niveles de Precedencia

Los que están más arriba tienen mayor precedencia —“pegan más”, se ponen entre paréntesis primero, se aplican primero.

$E(x := a), \cdot$	sustitución y evaluación
$\sqrt{}, ()^2$	raíces y potencias
$*, /$	producto y división
máx, mín	máximo y mínimo
$+, -$	suma y resta
$=, \leq, \geq$	conectivos aritméticos
\neg	negación
$\vee \wedge$	disyunción y conjunción
$\Rightarrow \Leftarrow$	implicación y consecuencia
$\equiv \neq$	equivalencia y discrepancia

Los operadores que están en un mismo nivel tienen exactamente la misma prioridad, así que deben ponerse siempre con paréntesis, a menos que asocien entre sí (\vee y \wedge , \neq y \equiv , máx y mín).

Teoremas No Tan Básicos

T8 De Morgan para la disyunción:

$$\neg(\square \vee \bigcirc) \equiv \neg\square \wedge \neg\bigcirc$$

T9 De Morgan para la conjunción:

$$\neg(\square \wedge \bigcirc) \equiv \neg\square \vee \neg\bigcirc$$

T10 Distributividad de la disyunción con la conjunción:

$$\square \vee (\bigcirc \wedge \diamond) \equiv (\square \vee \bigcirc) \wedge (\square \vee \diamond)$$

T11 Distributividad de la conjunción con la disyunción:

$$\square \wedge (\bigcirc \vee \diamond) \equiv (\square \wedge \bigcirc) \vee (\square \wedge \diamond)$$

T12 Asociatividad de la conjunción:

$$\square \wedge (\bigcirc \wedge \diamond) \equiv (\square \wedge \bigcirc) \wedge \diamond$$

T13 Conmutatividad de la conjunción:

$$\square \wedge \bigcirc \equiv \bigcirc \wedge \square$$

T14 Idempotencia de la conjunción:

$$\square \wedge \square \equiv \square$$

T15 Neutro de la conjunción:

$$\square \wedge \text{True} \equiv \square$$

T16 Elemento absorbente de la conjunción:

$$\square \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

T17 Contradicción:

$$\square \wedge \neg\square \equiv \text{False}$$

T18 Ley de absorción:

$$\square \wedge (\square \vee \bigcirc) \equiv \square$$

T19 Ley de absorción (bis):

$$\square \vee (\square \wedge \bigcirc) \equiv \square$$

Teoremas con Implicación

T20 Modus ponens:

$$\square \wedge (\square \Rightarrow \bigcirc) \Rightarrow \bigcirc$$

T21 Modus ponens con equivalencia:

$$\square \wedge (\square \Rightarrow \bigcirc) \equiv \square \wedge \bigcirc$$

T22 Modus tollens:

$$(\square \Rightarrow \bigcirc) \wedge \neg\bigcirc \Rightarrow \neg\square$$

T23 Modus tollens con equivalencia:

$$(\square \Rightarrow \bigcirc) \wedge \neg\bigcirc \equiv \neg\square \wedge \neg\bigcirc$$

T24 Currificación:

$$\square \Rightarrow (\bigcirc \Rightarrow \diamond) \equiv (\square \wedge \bigcirc \Rightarrow \diamond)$$

T25 Transitividad de \Rightarrow :

$$(\square \Rightarrow \bigcirc) \wedge (\bigcirc \Rightarrow \diamond) \Rightarrow (\square \Rightarrow \diamond)$$

T26 Debilitamiento para \wedge :

$$\square \wedge \bigcirc \Rightarrow \square$$

T27 Debilitamiento para \vee :

$$\square \Rightarrow \square \vee \bigcirc$$

T28 Distributividad a derecha de la implicación con la conjunción:

$$\square \Rightarrow (\bigcirc \wedge \diamond) \equiv (\square \Rightarrow \bigcirc) \wedge (\square \Rightarrow \diamond)$$

T29 Distributividad a izquierda de la implicación con la disyunción:

$$\square \vee \bigcirc \Rightarrow \diamond \equiv (\square \Rightarrow \diamond) \wedge (\bigcirc \Rightarrow \diamond)$$