

# Introducción a los algoritmos - 1º cuatrimestre 2010

## Axiomas y Teoremas del Cálculo Proposicional

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso i Alemany, Javier Blanco,  
Renato Cherini, Mauricio Tellechea, Pedro Sánchez Terraf.

### Axiomas

**A1** Asociatividad equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

**A2** Conmutatividad equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

**A3** Neutro equivalencia:

$$P \equiv \text{True} \equiv P$$

**A4** Definición de Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

**A5** Definición de False:

$$\text{False} \equiv \neg \text{True}$$

**A6** Definición de discrepancia:

$$P \not\equiv Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

**A7** Asociatividad disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

**A8** Conmutatividad disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

**A9** Idempotencia disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

**A10** Distributividad disyunción con equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

**A11** Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

**A12** Regla dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

**A13** Definición de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

**A14** Definición de consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

### Teoremas Básicos

**T1** Metateorema de True:

Si  $P$  está demostrado,  $P \equiv \text{True}$

**T2** Doble negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

**T3** Equivalencia y negación:

$$P \equiv \text{False} \equiv \neg P$$

**T4** Elemento absorbente de la disyunción:

$$P \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

**T5** Elemento neutro de la disyunción:

$$P \vee \text{False} \equiv P$$

**T6** Teorema (\*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

**T7** Negación de una implicación:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

### Niveles de Precedencia

Los que están más arriba tienen mayor precedencia —“pegan más”, se ponen entre paréntesis primero, se aplican primero.

$E(x := a), \cdot$	sustitución y evaluación
$\sqrt{\phantom{x}}, (\cdot)^2$	raíces y potencias
$*, /$	producto y división
máx, mín	máximo y mínimo
$+, -$	suma y resta
$=, \leq, \geq$	conectivos aritméticos
$\neg$	negación
$\vee \wedge$	disyunción y conjunción
$\Rightarrow \Leftarrow$	implicación y consecuencia
$\equiv \not\equiv$	equivalencia y discrepancia

Los operadores que están en un mismo nivel tienen exactamente la misma prioridad, así que deben ponerse siempre con paréntesis, a menos que asocien entre sí ( $\vee$  y  $\wedge$ ,  $\not\equiv$  y  $\equiv$ , máx y mín).

## Teoremas No Tan Básicos

**T8** Caracterización de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

**T9** De Morgan para la disyunción:

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

**T10** De Morgan para la conjunción:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

**T11** Distributividad de la disyunción con la conjunción:

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

**T12** Asociatividad de la conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

**T13** Idempotencia de la conjunción:

$$P \wedge P \equiv P$$

**T14** Neutro de la conjunción:

$$P \wedge \text{True} \equiv P$$

**T15** Elemento absorbente de la conjunción:

$$P \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

**T16** Ley de absorción:

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

**T17** Ley de absorción (bis):

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

## Teoremas con Implicación

**T18** Modus ponens:

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

**T19** Modus ponens con  $\equiv$ :

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$$

**T20** Modus tollens:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

**T21** Currificación:

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q \Rightarrow R)$$

**T22** Transitividad de  $\Rightarrow$ :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

**T23** Debilitamiento para  $\wedge$ :

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

**T24** Debilitamiento para  $\vee$ :

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

**T25** Definición dual de  $\Rightarrow$ :

$$P \Rightarrow Q \equiv P \wedge Q \equiv P$$