

Introducción a los algoritmos - 1º cuatrimestre 2010

Axiomas y Teoremas del Cálculo Proposicional

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso i Alemany, Javier Blanco,
Renato Cherini, Mauricio Tellechea, Pedro Sánchez Terraf.

Axiomas

A1 Asociatividad equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro equivalencia:

$$P \equiv \text{True} \equiv P$$

A4 Definición de Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de False:

$$\text{False} \equiv \neg \text{True}$$

A6 Definición de discrepancia:

$$P \not\equiv Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad disyunción con equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A12 Regla dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A13 Definición de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A14 Definición de consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas Básicos

T1 Metateorema de True:

Si P está demostrado, $P \equiv \text{True}$

T2 Doble negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T3 Equivalencia y negación:

$$P \equiv \text{False} \equiv \neg P$$

T4 Elemento absorbente de la disyunción:

$$P \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

T5 Elemento neutro de la disyunción:

$$P \vee \text{False} \equiv P$$

T6 Teorema (*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

T7 Negación de una implicación:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

Niveles de Precedencia

Los que están más arriba tienen mayor precedencia —“pegan más”, se ponen entre paréntesis primero, se aplican primero.

$E(x := a), \cdot$	sustitución y evaluación
$\sqrt{}, (\cdot)^2$	raíces y potencias
$*, /$	producto y división
máx, mín	máximo y mínimo
$+, -$	suma y resta
$=, \leq, \geq$	conectivos aritméticos
\neg	negación
$\vee \wedge$	disyunción y conjunción
$\Rightarrow \Leftarrow$	implicación y consecuencia
$\equiv \not\equiv$	equivalencia y discrepancia

Los operadores que están en un mismo nivel tienen exactamente la misma prioridad, así que deben ponerse siempre con paréntesis, a menos que asocien entre sí (\vee y \wedge , $\not\equiv$ y \equiv , máx y mín).

Teoremas No Tan Básicos

T8 Caracterización de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

T9 De Morgan para la disyunción:

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

T10 De Morgan para la conjunción:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

T11 Distributividad de la disyunción con la conjunción:

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

T12 Asociatividad de la conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T13 Idempotencia de la conjunción:

$$P \wedge P \equiv P$$

T14 Neutro de la conjunción:

$$P \wedge \text{True} \equiv P$$

T15 Elemento absorbente de la conjunción:

$$P \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

T16 Ley de absorción:

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

T17 Ley de absorción (bis):

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

Teoremas con Implicación

T18 Modus ponens:

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

T19 Modus ponens con \equiv :

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$$

T20 Modus tollens:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

T21 Currificación:

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q \Rightarrow R)$$

T22 Transitividad de \Rightarrow :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

T23 Debilitamiento para \wedge :

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

T24 Debilitamiento para \vee :

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

T25 Definición dual de \Rightarrow :

$$P \Rightarrow Q \equiv P \wedge Q \equiv P$$