

# Introducción a los Algoritmos - 1er. cuatrimestre 2012

## Axiomas y Teoremas del Cálculo de Predicados

Docentes: Araceli Acosta, Javier Blanco, Paula Estrella, Pedro Sánchez Terraf

### Axiomas del Cálculo de Predicados

**A1** Rango True:

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x : True : f.x \rangle$$

**A2** Intercambio entre rango y término:

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: r.x \Rightarrow f.x \rangle$$

**A3** Regla del término:

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \wedge \langle \forall x :: g.x \rangle \equiv \langle \forall x :: f.x \wedge g.x \rangle$$

**A4** Distributividad de  $\vee$  con  $\forall$  (si  $x$  no ocurre en  $X$ ):

$$X \vee \langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: X \vee f.x \rangle$$

**A5** Rango unitario (si  $\forall X$  y  $\exists X$  no ocurren en  $f.x$ ):

$$\langle \forall x : x = X : f.x \rangle \equiv f.X$$

**A6** Intercambio de Cuantificadores:

$$\langle \forall x :: \langle \forall y :: f.x.y \rangle \rangle \equiv \langle \forall y :: \langle \forall x :: f.x.y \rangle \rangle$$

**A7** Anidado:

$$\langle \forall x, y :: f.x.y \rangle \equiv \langle \forall x :: \langle \forall y :: f.x.y \rangle \rangle$$

**A8** Definición de  $\exists$  (Ley de De Morgan):

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \neg \langle \forall x : r.x : \neg f.x \rangle$$

**A9** Rango Vacío:

$$\langle \forall x : False : f.x \rangle \equiv True$$

### Teoremas Básicos

**T1** Término constante (si  $x$  no ocurre en  $X$ ):

$$\langle \forall x :: X \rangle \equiv X$$

**T2** Partición de rango:

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

**T3** Instanciación (si  $\forall Y$  y  $\exists Y$  no ocurren en  $f.x$ ):

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \Rightarrow f.Y$$

**T4** Cambio de variable (si  $x$  no ocurre en  $f.y$  ni  $y$  en  $f.x$ ):

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall y : r.y : f.y \rangle$$

**T5** Intercambio entre rango y término:

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: r.x \wedge f.x \rangle$$

**T6** Regla del término:

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \vee \langle \exists x :: g.x \rangle \equiv \langle \exists x :: f.x \vee g.x \rangle$$

**T7** Distributividad de  $\wedge$  con  $\exists$  (si  $x$  no ocurre en  $X$ ):

$$X \wedge \langle \exists x :: f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: X \wedge f.x \rangle$$

**T8** Partición de rango:

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \vee \langle \exists x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

**T9** Testigo (si  $\forall X$  y  $\exists X$  no ocurren en  $f.x$ ):

$$f.Y \Rightarrow \langle \exists x :: f.x \rangle$$