Introducción a los Algoritmos - 2do cuatrimestre 2010

Guía 2: Cálculo Proposicional

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso i Alemany, Luciana Benotti, Paula Estrella

La lógica proposicional constituye la primera y más elemental formalización del razonamiento deductivo. El objetivo general de esta guía es introducirnos a la lógica proposicional, como herramienta para modelar el lenguaje natural y razonamientos sobre el mismo, y otros problemas mas específicos como problemas de ingenio, cálculo de funciones, etc.

Uno de los objetivos específicos más importantes es lograr un buen entrenamiento de las habilidades necesarias para realizar una demostración formal en este sistema lógico sencillo, que resulta un pilar fundamental para otros cálculos mas complejos y potentes.

Evaluación, sustitución sintáctica y tipado

La lógica proposicional amplía el lenguaje que venimos manejando, introduciendo dos constantes que representan los valores de verdad (True y False) y diversos operadores booleanos sobre estos valores ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\equiv$, $\Rightarrow$). Esta lógica nos permite escribir expresiones que codifican propiedades más interesantes, como por ejemplo que "si un número a es mayor a b y, además, b es mayor a c, entonces a tiene que ser mayor a c"*:*

$$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$$

Al complejizarse el lenguaje, es necesario establecer reglas de notación para poder escribir las expresiones con mayor claridad y sin ambigüedades. En particular, es posible eliminar paréntesis cuando los operadores involucrados son asociativos (es decir, cuando no importa el orden en que asocie los operandos), y según las reglas de precedencia, tal como hemos visto hasta ahora.

Los operadores $\wedge$, $\vee$, $\equiv$, $\not\equiv$ son asociativos. Esto nos permite establecer por ejemplo que las expresiones $p \wedge q \wedge r$, junto con $p \wedge (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ son equivalentes.
A la derecha se listan los nuevos operadores y aquellos vistos anteriormente, en orden de mayor a menor precedencia.
*En los siguientes ejercicios comenzamos trabajando principalmente con los aspectos **sintácticos** del nuevo lenguaje, para asegurar una buena capacidad de lectura y escritura de las nuevas expresiones, y con la **semántica** de los nuevos operadores, es decir, su significado.*

Niveles de Precedencia

1	$E(x := a)$, .	*sustitución y evaluación*
2	$\sqrt{\ }, (\cdot)^2$	*raíces y potencias*
3	$*, /$	*producto y división*
4	max , min	*máximo y mínimo*
5	$+, -$	*suma y resta*
6	$=, \leq, \geq$	*operadores de comparación*
7	$\neg$	*negación*
8	$\vee\ \wedge$	*disyunción y conjunción*
9	$\Rightarrow\ \Leftarrow$	*implicación y consecuencia*
10	$\equiv\ \not\equiv$	*equivalencia y discrepancia*

1. Evaluá las siguientes expresiones *booleanas*, subrayando la subexpresión resuelta en cada paso justificado. Luego usá un intéprete de `haskell` para verificar los resultados. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
& \underline{(False \vee True)} \wedge False \equiv False \\
\equiv\ & \{ \text{ def. de } \vee \text{ } \} \\
& \underline{True \wedge False} \equiv False \\
\equiv\ & \{ \text{ def. de } \wedge \text{ } \} \\
& False \equiv False \\
\equiv\ & \{ \text{ def. de } \equiv \text{ } \} \\
& True
\end{aligned}$$

En `haskell` los distintos operadores booleanos se pueden escribir así:

$\neg p$	`not p`
$p \wedge q$	`p && q`
$p \vee q$	`p || q`
$p \equiv q$	`p == q`

   a) $((True \wedge True) \vee False) \equiv False \vee True$

   b) $5 > 3 \wedge 3 > 1 \Rightarrow 5 > 1$

   c) $7 > 4 \wedge 4 > 7$

   d) $7 > 4 \vee 4 > 7$

   e) $False \Rightarrow 2 + 2 = 5$

   f) $2 + 2 = 5 \Rightarrow True$

Los dos últimos ítems no pueden codificarse directamente en `haskell` porque no disponemos de un operador $\Rightarrow$ en ese lenguaje. ¿Cómo podemos definir una función $implies : Bool \to Bool \to Bool$ que se comporte como $\Rightarrow$?

2. Sacá todos los paréntesis que sean *superfluos* según las reglas de precedencia de los operadores booleanos.

   a) $((((a = b) \wedge (b = c)) \Rightarrow (a = c)) \equiv True)$.
   b) $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \equiv q))$.
   c) $(((p \wedge q) \vee (\neg r)) \Rightarrow (p \wedge (q \vee r)))$.

3. Introducí paréntesis para hacer *explícita* la precedencia.

   a) $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.
   b) $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$.
   c) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

4. ¿Están bien escritas las siguientes expresiones? Justificá a través de un árbol de tipado. Para evitar errores, hacé explícita la precedencia introduciendo paréntesis, y construí una tabla con el tipo de las variables (cuando existan).

   a) $(True \equiv a) \vee 5$.
   b) $((True \wedge False) \Rightarrow False) \equiv False$.
   c) $2 = 3 \vee 3 = 4 \vee a * a + 2 \leq b + 7$.
   d) $(x \wedge y \equiv a) \wedge z \leq w$.
   e) $x + 3 \Rightarrow y$.
   f) $(x + 3 = y) \wedge \neg z$.
   g) $a \vee b = 3 + y$.
   h) $x = (y = z)$.
   i) $(x = y) \equiv z$.
   j) $x = (y \equiv z)$.
   k) $a \wedge b \leq a$.

5. Resolvé las siguientes sustituciones *simples*.

   a) $(x + 2)(x := 6)$.
   b) $(x + 2)(x := x + 6)$.
   c) $(x * x)(x := z + 1)$.
   d) $(x + z)(y := z)$
   e) $(x * (z + 1))(x := z + 1)$.
   f) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))(q := p \Rightarrow r)$.
   g) $(p \wedge q \Rightarrow q)(p := q \Rightarrow r)$.

6. Resolvé las siguientes sustituciones *simultáneas*.

   a) $(x + y)(x, y := 6, 3 * z)$.
   b) $(x + 2)(x, y := y + 5, x + 6)$.
   c) $(x * (y - z))(x, y := z + 1, z)$.
   d) $(x * (z + 1))(x, y, z := z, y, x)$.
   e) $(((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)(p, q := r \vee s, t \wedge u)$.

7. Resolvé las siguientes sustituciones *sucesivas*.

   a) $(x + 2)(x := 6)(y := x)$.
   b) $(x + 2)(x := y + 6)(y := x - 6)$.
   c) $(x + y)(x := y)(y := 3 * z)$.
   d) $(x + y)(y := 3 * z)(x := y)$.
   e) $(x * (z + 1))(x, y, z := z, y, x)(z := y)$.
   f) $(4 * x * x + 4 * y * x + y * y)(x, y := y, x)(y := 3)$.

8. Resolvé las siguientes sustituciones. Notá cómo estos ejemplos muestran que la sustitución sucesiva no es conmutativa y que en general no es equivalente a la sustitución simultánea.

   a) $(x^y)(x := y)(y := x)$.
   b) $(x^y)(y := x)(x := y)$.
   c) $(x^y)(x, y := y, x)$.

9. En las expresiones resultantes de los ejercicios $(5b)$, $(5c)$, $(5f)$, $(5g)$, $(6a)$, $(6b)$ y $(6e)$ eliminá todos los paréntesis superfluos, usando las reglas de precedencia.

10. Resolvé las siguiente sustituciones que involucran axiomas del Cálculo Proposicional.

    a) $(P \vee Q \equiv Q \vee P)(P, Q := p \wedge q, p \vee q)$.
    b) $(P \vee Q \equiv Q \vee P)(Q, P := p \vee q, p \vee q)$.
    c) $(P \vee Q \equiv Q \vee P)(P, Q := x \mod 2 = 0, x \mod 2 \neq 0)$.
    d) $(P \vee Q \equiv P \equiv Q \equiv P \wedge Q)(Q, P := p, q \vee q)$.
    e) $([(P \vee Q) \equiv Q] \equiv P \Rightarrow Q)(P, Q := p \equiv r, q \Rightarrow \neg r)$.
    f) $(P \wedge (Q \wedge P) \equiv P \wedge Q)(Q, P := p \wedge (q \vee p), r \vee \neg r)$.

11. Decidí si existen en cada caso expresiones booleanas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ tales que las siguientes sustituciones resueltas sean válidas. Por ejemplo, si la sustitución resuelta es

$$\big(P \equiv Q \equiv P\big)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; (p \equiv q \equiv r \equiv p)$$

se debe encontrar qué subexpresiones de la expresión derecha cumplen el rol de las variables P y Q de la expresión de la izquierda (antes de la sustitución). Para ello, uno debe observar los operadores de la expresión resultado e intentar relacionarlos con los operadores de la expresión original. En este caso, dado que la variable P ocurre a la izquierda y a la derecha en la expresión $P \equiv Q \equiv P$, los operadores $\equiv$ se corresponden (necesariamente) según el siguiente esquema:

$$\big(P \boxed{\equiv} Q \boxed{\equiv} P\big)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; (p \boxed{\equiv} q \equiv r \boxed{\equiv} p)$$

Luego, p ocupa el lugar de P, y $q \equiv r$ el lugar de Q, por lo tanto obtenemos que $\mathcal{E} \doteq p$ y $\mathcal{F} \doteq q \equiv r$ es una solución (¿hay otra solución posible?).

    a) $\big(P \equiv \neg P\big)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; (p \equiv q) \equiv \neg(p \equiv q)$
    b) $\big(Q \Rightarrow P \equiv ((P \wedge Q) \equiv Q)\big)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; (r \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv ((p \wedge (r \Rightarrow q)) \equiv (r \Rightarrow q))$
    c) $\big(((P \vee Q) \equiv Q) \equiv P \Rightarrow Q\big)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=$ $(((x = 3 \,\wedge\, y = 3) \vee\, y = 2) \equiv y = 2) \equiv (x = 3 \,\wedge\, y = 2) \Rightarrow\, y = 2$
    d) $\big((P \vee Q) \wedge P \equiv P\big)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=$ $(x \mod 2 = 0 \vee x \mod 5 = 0) \wedge (x \mod 2 = 0 \vee x \mod 5 = 0) \equiv (x \mod 2 = 0 \vee x \mod 5 = 0)$

12. ¿Están bien escritas las siguientes expresiones? Justificá a través de un árbol de tipado. Para evitar errores, hacé explícita la precedencia introduciendo paréntesis, y construí una tabla del tipo de las variables.

    a) $a \geq b \wedge 3 + 2 < 4 \;\Rightarrow\; c \equiv b + 1 = 2$.
    b) $a + 2 \geq c \Rightarrow 3 + 2 < b \;\equiv\; c \equiv b = 2 * a$.
    c) $\neg a * b + c = d \vee p \Rightarrow q \equiv r \Leftarrow s \wedge j = k + l * m$.
    d) $(a > b \wedge c \Rightarrow d) \triangleright (\#[a, b, c] > 0) \triangleright [\mathit{True}]$

13. Escribí una fórmula proposicional para cada una de las siguientes frases, utilizando una variable proposicional para cada sentencia atómica, aclarando siempre el significado escogido para cada variable. A veces es conveniente reescribir las frases para hacer más claro su sentido. En lo posible utilizá un mismo nombre para la misma sentencia atómica a lo largo de todo el ejercicio, para poder comparar las fórmulas. Por ejemplo, puede pensarse que la frase

Hoy es martes o jueves.

consta de dos sentencias atómicas, la segunda con el "sujeto" tácito, así que se pueden reescribir:

Hoy es martes **u hoy es** jueves

Entonces podemos formalizarla con la fórmula $p \vee q$, utilizando p para la primer sentencia y q para la segunda, es decir, definiendo:

$$p \doteq \text{hoy es martes}$$
$$q \doteq \text{hoy es jueves}$$

a) La vida es maravillosa.

b) Hoy es martes y hay sol.

c) Hoy es martes y no hay sol.

d) El pollo es sabroso, pero el cerdo es más rico.

e) Me gusta la playa, pero no iré en las vacaciones.

f) Hoy no es ni miércoles ni viernes.

g) Ni Córdoba ni Río Cuarto son la capital de Argentina.

h) Yo no voy de vacaciones y Juan y Pedro tampoco.

i) Juan vendrá a clase, y seguro que vendrán también María o Pedro.

j) Santa Fe o Rosario deberían ser la capital de Santa Fe, pero Rosario es claramente más grande.

k) Ya sea por desinformación o porque entendiste mal, eres responsable de dar mal la información.

l) Sólo si sopla viento sur y nieva se mantendrá la nieve en las pistas de esquí.

m) Si no tienes menos de 18 años ni tienes antecedentes puedes irte a vivir a otro país.

n) No es verdad que si tienes menos de 16 años y consentimiento paterno te puedas casar.

ñ) Si la segunda guerra mundial hubiera empezado en 1935, la Unión Soviética no habría entrado en la guerra.

o) Mañana, llueve o no llueve.

p) Mañana será jueves y no será jueves.

q) Me llamo Laura es tan cierto como que me llamo Laura.

r) Hoy comemos fideos o el cocinero sigue el menú de la semana es lo mismo que que el cocinero sea muy organizado.

s) Hoy comeremos fideos o el cocinero sigue el menú de la semana es lo mismo que hoy comamos fideos o el cocinero sea muy organizado.

t) El cocinero sigue el menú de la semana es lo mismo que el cocinero sea muy organizado; que es lo mismo que, el cocinero sea muy organizado es lo mismo que el cocinero siga el menú de la semana.

u) Que me gusten las frutillas no es lo mismo que me guste el helado de frutilla.

Cálculo Proposicional

A partir de esta sección, comenzamos a trabajar con demostraciones con el Cálculo Proposicional. Según la Wikipedia, "... una deducción o demostración matemática es una sucesión coherente de pasos que, tomando como verdadero un conjunto de premisas llamado hipótesis, permite asegurar la veracidad de una tesis. Estos pasos deben estar fundamentados en la aplicación de reglas de deducción (fundadas ya sea en axiomas o en teoremas anteriormente demostrados o en reglas básicas de deducción *del sistema en cuestión)."*[1]

Una demostración en el Cálculo Proposicional consiste en probar la validez de una fórmula del estilo $P \equiv Q$*. Para ello podemos seguir dos estrategias: aplicar sucesivos pasos transformando la expresión completa en True, o bien partir de la subexpresión* P *y transformarla en la subexpresión* Q *(o viceversa). En ambos casos, cada paso de "transformación" consiste en "reescribir" la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos.*

Cada axioma o teorema nos habilita a reescribir una expresión de diversas maneras. Por ejemplo la Regla Dorada, cuya formulación es $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$*, nos permite reescribir la expresión* $P \wedge Q$ *por* $P \equiv Q \equiv P \vee Q$*, pero también:*

$$\begin{array}{rcl} P \wedge Q \equiv P & \textit{por} & Q \equiv P \vee Q \\ Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \wedge Q \equiv P \\ P \wedge Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \equiv Q \\ P \wedge Q \equiv Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & Q \\ P \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \wedge Q \equiv Q \\ \textit{etc} \ldots & & \end{array}$$

[1] `http://es.wikipedia.org/wiki/Demostracion_matematica`

Notá además que el lugar de las variables P, Q y R en un axioma o teorema puede ser ocupado por cualquier fórmula que involucre variables proposicionales, como p, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q \vee r$, etc, o incluso fórmulas más concretas como $2 * 2 = 4$, $x \leq 0$, etc. Típicamente un paso de una demostración será como el siguiente:

$$\begin{array}{l} \quad (x \mod 2 = 0) \wedge (x \geq 0) \equiv (x \mod 2 = 0) \\ \equiv \{ \textit{ (Regla Dorada)}(P, Q := x \mod 2 = 0, x \geq 0) \ \} \\ \quad (x \geq 0) \equiv (x \mod 2 = 0) \vee (x \geq 0) \end{array}$$

Los siguientes ejercicios nos introducen gradualmente en las demostraciones de la lógica proposicional, en las diferentes formas de utilizar un axioma o teorema, primero resolviendo un paso deductivo sencillo, para luego avanzar en la tarea de hacer una demostración completa. La habilidad de realizar una demostración de esta forma es uno de los principales objetivos de esta materia, y en este sentido, los ejercicios 20, 21 y 22 son de los más importantes.

14. Encontrá el axioma o teorema utilizado para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones que consta de un solo paso deductivo. Por ejemplo, el siguiente paso:

$$\begin{array}{l} \quad q \equiv p \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \equiv q \end{array}$$

nos dice que $(q \equiv p) \equiv (p \equiv q)$, es decir, que no importa el "orden" de los operandos del $\equiv$ (notá que se pueden sacar los paréntesis). Esta es una forma particular de utilizar el axioma de Conmutatividad de la equivalencia (cuya formulación es $P \equiv Q \equiv Q \equiv P$): reescribimos $Q \equiv P$ con $P \equiv Q$, (cuando p ocupa el lugar de P, y q el lugar de Q, o más sintéticamente $P, Q := p, q$).

a)
$$\begin{array}{l} \quad p \equiv \textit{False} \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad \neg p \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \quad p \Rightarrow q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \vee q \equiv q \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} \quad q \equiv p \vee q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \wedge q \equiv p \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} \quad p \vee (q \equiv r) \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \vee q \equiv p \vee r \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{l} \quad p \vee \textit{False} \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{l} \quad \textit{True} \equiv p \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \end{array}$$

15. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de forma que la sustitución $(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ justifique cómo fue aplicado cada axioma o teorema para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones. En todos los casos enunciá la formula cuya validez se demuestra. Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

$$\begin{array}{l} \quad \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \\ \equiv \{ \text{ (Definición de negación)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ \quad \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array}$$

demuestra la validez de la fórmula:	$\neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p$
utilizando el axioma "Definición de negación":	$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q.$
con la sustitución	$P, Q := (p \Rightarrow q), p$

Viéndolo de otro modo, ¿qué sucede si aplicamos la sustitución $(P, Q := (p \Rightarrow q), p)$ al axioma "Definición de negación"?:

$$\begin{array}{l} \quad (\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q)(P, Q := (p \Rightarrow q), p) \\ \equiv \{ \text{ Definición de sustitución } \} \\ \quad \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array}$$

Obtenemos exactamente la fórmula a demostrar, lo que verifica que efectivamente $\mathcal{E} \doteq p \Rightarrow q$ y $\mathcal{F} \doteq p$ es una solución.

Para encontrar la sustitución no existe un método preciso. Podemos pensar en las variables P, Q y R de los axiomas como "comodines" diferentes, cada uno de los cuales puede representa una formula cualquiera (tan grande como queramos), pero de manera coherente: el lugar de un comodín es ocupado siempre por la **misma** fórmula. Una vez que tenemos la fórmula cuya validez es demostrada por el paso deductivo, la ubicación de los paréntesis y de los operadores ayuda a encontrar la sustitución utilizada. A continuación la primera es la fórmula a demostrar, y la segunda el axioma visto con "comodines":

$$\begin{array}{l} \neg(\, p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg\,(p \Rightarrow q) \equiv p \\ \neg(\quad \diamondsuit \quad \equiv \clubsuit) \equiv \neg \quad \diamondsuit \quad \equiv \clubsuit \end{array}$$

Claramente el lugar de $\diamondsuit$ lo ocupa $p \Rightarrow q$, y el lugar de $\clubsuit$, la variable p.

a)
$$\begin{array}{ll} & p \equiv q \equiv r \\ \equiv & \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & r \equiv p \equiv q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & p \vee q \vee (\mathit{False} \equiv \neg q) \\ \equiv & \{ \text{ (Distributividad } \vee \text{ con } \equiv)(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \ \} \\ & p \vee q \vee \mathit{False} \equiv p \vee q \vee \neg q \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} & \neg p \wedge (r \Rightarrow s) \\ \equiv & \{ \text{ (Regla dorada)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & \neg p \equiv r \Rightarrow s \equiv \neg p \vee (r \Rightarrow s) \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} & n \ \text{ mód } 4 = 0 \Rightarrow n \ \text{ mód } 2 = 0 \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & n \ \text{ mód } 4 = 0 \vee n \ \text{ mód } 2 = 0 \equiv n \ \text{ mód } 2 = 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ll} & x > 2 \vee y > 5 \equiv x > 2 \vee \neg y > 5 \\ \equiv & \{ \text{ (Teorema } *)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & x > 2 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{ll} & \neg(p \wedge q \wedge r \Rightarrow p \wedge s) \\ \equiv & \{ \text{ (Negación de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & p \wedge q \wedge r \wedge \neg(p \wedge s) \end{array}$$

16. Completá las siguientes demostraciones, ahora encontrando tanto el axioma (o teorema) y la sustitución utilizados. Además enunciá en cada caso la fórmula cuya validez es demostrada.

a)
$$\begin{array}{ll} & (p \vee q \Rightarrow r) \equiv \mathit{False} \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & \neg(p \vee q \Rightarrow r) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & p \vee (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow r \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} & \neg s \equiv r \vee \neg s \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & r \wedge \neg s \equiv r \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} & p \vee (q \equiv p \wedge r) \equiv p \vee q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & p \vee (p \wedge r) \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ll} & r \equiv r \equiv p \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & p \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{ll} & \mathit{True} \equiv \mathit{False} \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & \mathit{False} \end{array}$$

17. Al igual que el ejercicio anterior, completá los pasos deductivos, pero ahora subrayando las subexpresiones donde se aplica el axioma. Notá que en estos casos, cada paso paso deductivo justifica el reemplazo de una subexpresión por otra que es equivalente. Reemplazar "iguales por iguales" es lícito en cualquier contexto, y es algo que efectivamente venimos realizando desde las primeras demostraciones de la Guía 1. Por ejemplo, en el siguiente paso, aplicamos la "Definición de negación" en la subexpresión $p \equiv \mathit{False}$:

$$\begin{array}{ll} & p \wedge \underline{(p \equiv \mathit{False})} \equiv p \wedge q \equiv p \vee q \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de negación)}(P := p) \ \} \\ & p \wedge \boxed{\neg p} \equiv p \wedge q \equiv p \vee q \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{ll} & p \equiv q \equiv p \wedge q \equiv p \vee q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & p \vee (q \wedge r) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & p \vee (q \equiv r \equiv q \vee r) \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} & (\neg q \Rightarrow r \vee p \equiv \mathit{true}) \Leftarrow (p \vee r) \wedge \neg q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & (\neg q \Rightarrow r \vee p) \Leftarrow (p \vee r) \wedge \neg q \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} & \neg(\neg(\neg(\neg(p \equiv q) \equiv r) \equiv s) \equiv t) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & \neg(\neg((\neg(p \equiv q) \not\equiv r) \equiv s) \equiv t) \end{array}$$

18. Completá las siguientes demostraciones especificando el axioma o teorema utilizado y la sustitución correspondiente; subrayá la subexpresión donde se aplica. Luego, verificá la demostración utilizando el Verificador de Pruebas `yahc`.

a)
$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\neg\neg p \equiv q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & \neg p \equiv q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & \neg(p \equiv q) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & p \not\equiv q
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{ll}
 & p \vee (q \equiv r \equiv s) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & p \vee (q \equiv r) \equiv p \vee s \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & p \vee q \equiv p \vee r \equiv p \vee s
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{ll}
 & p \Rightarrow q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & p \vee q \equiv q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & q \equiv p \vee q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & p \wedge q \equiv p
\end{array}
$$

d)
$$
\begin{array}{ll}
 & \neg p \equiv \neg q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & \neg(p \equiv \neg q) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & \neg(\neg q \equiv p) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & \neg\neg(q \equiv p) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & \neg\neg(p \equiv q) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad \} \\
 & p \equiv q
\end{array}
$$

19. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una demostración, ejemplo o contraejemplo.

a) p

b) $p \equiv p$

c) $p \equiv p \equiv p$

d) $p \Rightarrow q$

e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

20. Demostrá (y verificá en `yahc`) que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas *válidas*. Realizá la demostración con máximo nivel de detalle, esto es, justificando cada paso con un axioma y la sustitución utilizada en el mismo. Como ejemplo demostramos la *Asociatividad de la discrepancia*: $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$, partiendo de la parte izquierda:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(Q := (q \not\equiv r)) \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := q, r) \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, r) \} \\
 & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := (p \equiv \neg q), r) \} \\
 & \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(Q := \neg q) \} \\
 & \underline{(\neg q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, p) \} \\
 & \neg\underline{(q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Conmutatividad de } \equiv \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \} \\
 & (p \not\equiv q) \not\equiv r
\end{array}
$$

a) *Distributividad de la disyunción con la disyunción*: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

b) *Elemento absorbente de la disyunción*: $p \vee true \equiv true$

c) *De Morgan para la disyunción*: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

21. Demostrá (y verificá en `yahc`) que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado, ahora sin necesidad de especificar la sustitución utilizada.

    a) *Caracterización de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

    b) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.

    c) *Modus ponens*: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.

    d) *Modus tollens*: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.

    e) *Neutro de la discrepancia*: $(p \not\equiv false) \equiv p$

    f) *Distributividad de la disyunción con la conjunción*: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

    g) *Asociatividad de la conjunción*: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

    h) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$

    i) *Neutro de la conjunción*: $p \wedge \mathit{True} \equiv p$

    j) *Ley de absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

    k) *Ley de absorción (bis)*: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

    l) *Teorema de De Morgan*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

22. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo.

    a) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r)$

    b) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv p$

    c) $p \wedge (q \equiv r \equiv s) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv (p \wedge s)$

    d) $\big(a \vee b \vee c \equiv a \vee b \equiv a \vee c \equiv b \vee c \equiv \mathit{False}\big) \equiv \big((a \equiv b \equiv c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)\big)$

    e) $p \Leftarrow (q \equiv r) \equiv p \Leftarrow q \equiv p \Leftarrow r$

Aplicaciones del Cálculo Proposicional

Además de ser una herramienta poderosa para probar que una fórmula es válida o que un programa es correcto, el Cálculo Proposicional puede utilizarse también para resolver acertijos o determinar si un razonamiento es válido. La ventaja de usar el Cálculo Proposicional en vez de tablas de verdad, es que éste aporta soluciones más elegantes y permite manipular fórmulas que involucren muchas variables.

El ***análisis de razonamientos lógicos*** *busca determinar si un enunciado en lenguaje natural es válido o no. Para ello, es necesario identificar proposiciones atómicas y operadores involucrados para convertirlos en proposiciones, algunas de las cuales serán premisas (o hipótesis)* P_1, P_2, ..., P_n *y una de ellas (la última) será la conclusión* C. *Para demostrar que el razonamiento es válido se construye una prueba de* $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ *o si el razonamiento no es válido se da un contraejemplo asignando un valor de verdad a cada variable proposicional. El ejercicio 23 propone resolver este tipo de razonamientos.*

Una tarea muy importante en el desarrollo de software es el modelado de problemas. *Cuando nos encontramos con un problema a resolver la primera tarea que se plantea es cómo expresar este problema ordenanadamente para trabajar con rigurosidad en su solución. En el tipo de ejercicio mencionado arriba se trabaja formalizando razonamientos lógicos sobre el cálculo proposicional. La idea principal consiste en modelar oraciones del lenguaje natural en términos proposicionales. En los siguientes ejercicios damos un paso más en la formalización trabajando con problemas cuyo modelado es más complejo.*

Los acertijos lógicos son pasatiempos o juegos que consisten en hallar la solución de un enigma o encontrar el sentido oculto de una frase sólo por vía del razonamiento. Un tipo de acertijos muy conocido es aquel en que distintos personajes enuncian una frase y se debe determinar si dicen la verdad o si mienten; estos personajes son conocidos como ***"caballeros y pícaros"****. Los caballeros siempre dicen la verdad mientras que los pícaros siempre mienten. Los ejercicios 24 al 29 son este estilo.*

El resto de los ejercicios consisten en combinaciones del Cálculo Proposicional con temas que ya hemos visto anteriormente: definición de funciones recursivas, razonamiento sobre el operador máx, y demostraciones por inducción.

La formalización de lenguaje natural puede resultar ambigua. A continuación se listan posibles traducciones de conectores del lenguaje natural a operadores lógicos, aunque no siempre son las apropiadas y dependen del contexto.

$\neg$	*"No –", "Es falso que –", "No es el caso que –", etc.*
$\land$	*"– y –", "–, pero –", "–, sin embargo –",*
$\lor$	*"– o –", "– o – o ambos –".*
$\Rightarrow$	*"[Si] – entonces –", "– luego –", "–. Como consecuencia, –"*
$\equiv$	*"– si y sólo si –", "Son equivalentes – y –".*
$\not\equiv$	*"O bien – o –".*

23. Formalizá los siguientes razonamientos en el cálculo proposicional y demostrá su corrección. Por ejemplo:

Enunciado: Si el gobernador quiere mejorar su imagen, o mejora su política social o gasta más en publicidad. El gobernador no mejora su política social. Luego, si el gobernador quiere mejorar su imagen, entonces deberá gastar más en publicidad.

Solución: Si utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

$$\begin{aligned} i &\doteq \text{el gobernador quiere mejorar su imagen} \\ s &\doteq \text{el gobernador mejora su política social} \\ p &\doteq \text{el gobernador gasta más en publicidad} \end{aligned}$$

podemos especificar la primer sentencia con la fórmula $i \Rightarrow s \lor p$, la segunda con $\neg s$, y la tercera con $i \Rightarrow p$. La primera y segunda sentencias son las *hipótesis del razonamiento*, y la final la *conclusión*. Un razonamiento de este tipo es correcto cuando la conjunción de las hipótesis P_1, P_2, ..., P_n implica la conclusión C, es decir cuando la siguiente fórmula es válida:

$$P_1 \land P_2 \land \ldots \land P_n \Rightarrow C$$

En nuestro ejemplo, el razonamiento completo se puede formalizar como:

$$(i \Rightarrow s \lor p) \land \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$$

A continuación demostramos que este razonamiento es válido, es decir, que su formula es válida. Notá que un razonamiento de este estilo incluye siempre un operador $\Rightarrow$ y posiblemente varios $\land$. Suele ser útil entonces utilizar el teorema de "Caracterización de implicación" y el teorema de "Debilitamiento para $\land$" (ej. 21 items a y b).

$$\begin{aligned}
& (\underline{i \Rightarrow s \lor p}) \land \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& \underline{(\neg i \lor s \lor p) \land \neg s} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Conmutatividad y Asociatividad de } \lor \} \\
& \underline{((\neg i \lor p) \lor s) \land \neg s} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Distributividad de } \land \text{ con } \lor \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor (\underline{s} \land \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Doble negación } \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor \underline{(\neg\neg s \land \neg s)} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ De Morgan } \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor \neg(\underline{\neg s \lor s}) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Tercero excluido } \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor \neg(\mathit{True}) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Definición de } \mathit{False}\text{, Neutro de } \lor \} \\
& (\underline{(\neg i \lor p)} \land \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& (i \Rightarrow p) \land \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Debilitamiento para } \land \} \\
& \mathit{True}
\end{aligned}$$

a) Si hago mucho deporte estoy cansado. No estoy cansado, por lo tanto no hago mucho deporte.

b) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Es el caso que llueve y no tengo paraguas, por lo tanto, me mojo y me resfrío.

c) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Me estoy mojando y me estoy resfriando, por lo tanto, llueve y no tengo paraguas.

d) Si me salto alguna comida tengo hambre. Cuando tengo hambre me entra dolor de cabeza. Tengo dolor de cabeza, así que me he saltado una comida.

e) Mis vecinos sólo están silenciosos si salieron la noche anterior. Mis vecinos están silenciosos, por lo tanto salieron la noche anterior.

f) Si el gobernador quiere mejorar su imagen entonces mejora su política social. El gobernador no mejora su política social por lo tanto no quiere mejorar su imagen.

g) Si el presidente entiende las protestas de la gente entonces si quiere ser reelegido cambiará su política. El presidente quiere ser reelegido. Luego, si el presidente entiende las protestas de la gente, entonces cambiará su política.

h) Si la ciudadanía romana hubiera sido una garantía de los derechos civiles, los romanos habrían gozado de libertad religiosa. Si los romanos hubieran gozado de libertad religiosa, entonces no se habría perseguido a los primeros cristianos. Pero los primeros cristianos fueron perseguidos. Por consiguiente, la ciudadanía romana no puede haber sido una garantía de los derechos civiles.

24. **La isla de caballeros y pícaros, es una isla que está habitada sólamente por dos tipos de personas: los caballeros, que siempre dicen la verdad, y los pícaros, que siempre mienten.** Por ejemplo, en la isla de caballeros y pícaros *Alberto* (un habitante de la isla) que se encuentra en compañía de Bernardo (otro habitante de la isla) dice: "Al menos uno de nosotros es un pícaro".

¿Cómo podemos formalizar el problema?

Una forma bastante eficiente y general para modelar este tipo de problemas es definiendo las constantes A para Alberto, y B para Bernardo, de la siguiente manera:

$$A \doteq \text{Alberto es caballero}$$
$$B \doteq \text{Bernardo es caballero}$$

Estamos tentados a pensar que podemos formalizar el problema, formulando proposicionalmente lo dicho por Alberto con la sentencia $\neg A \vee \neg B$ (ya que afirmar que alguno es pícaro es lo mismo que decir que alguno "no es caballero"). Sin embargo esto no es suficiente ya que no sabemos *a priori* si Alberto está diciendo la verdad o esta mintiendo.

Para modelar el *tipo* de cada persona podemos utilizar los valores booleanos para las constantes, en nuestro caso, A y B. Asi *True* representa "ser caballerio" y *False* el hecho de "ser pícaro". Observemos que si Alberto es caballero, su valor de verdad (es decir el valor de A) corresponde al valor de verdad de su afirmación, ya que los caballeros siempre dicen la verdad. Entonces podemos combinar esta observación con la sentencia de arrriba, y modelar el problema con la fórmula

$$A \equiv \neg A \vee \neg B$$

A partir de esta formalización podemos realizar cálculos con las herramientas conocidas para reducir la expresión a alguna cuyo significado sea más evidente:

$$\begin{array}{l}
\quad A \equiv \underline{\neg A \vee \neg B} \\
\equiv \{ \text{ De Morgan } \} \\
\quad A \equiv \neg(A \wedge B) \\
\equiv \{ \text{ Definición de negación } \} \\
\quad \neg(\underline{A \equiv A \wedge B}) \\
\equiv \{ \text{ Regla Dorada } \} \\
\quad \neg(\underline{A \vee B \equiv B}) \\
\equiv \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \} \\
\quad \neg(A \Rightarrow B) \\
\equiv \{ \text{ Negación de } \Rightarrow \} \\
\quad A \wedge \neg B
\end{array}$$

Así obtenemos que la sentencia original es equivalente a $A \wedge \neg B$, cuya traducción al lenguaje natural es:

"A es caballero y B no es caballero."

o lo que es lo mismo

"***A* es caballero y *B* es pícaro.**"

Estando en la isla de caballeros y pícaros nos encontramos con dos personas, A y B. En cada caso, según lo dicho por estos personajes, determiná (y demostrá) qué son A y B. Definí claramente las variables proposicionales que utilices.

a) Si A dice: "Yo soy un pícaro o B es un caballero"

b) Si B dice: "Yo soy un pícaro pero A no"

c) Si A dice: "Si soy un caballero entonces B también lo es"

25. Decimos que dos personas son *del mismo tipo* si son ambas caballeros o ambas pícaros (es decir si son lógicamente equivalentes). Nos encontramos con tres personas A, B y C, que dicen lo siguiente:

    A: "B es un pícaro."

    B: "A y C son del mismo tipo."

    ¿C es caballero o pícaro?

    Ayuda: En la expresión que formaliza lo dicho por B reemplazá la constante A por su equivalente.

26. Le preguntan a A si es un caballero, quien responde "Si soy un caballero entonces me comeré el sombrero". Demostrá que A debe comerse el sombrero.

27. Nos encontramos con A que nos revela: "Amo a María". Mas tarde A confiesa: "Si amo a María, entonces amo a Yolanda". ¿Qué podemos decir de A (además de que tiene la existencia complicada)?

28. Te encontrás con B que te dice: "Si yo soy pícaro, entonces Ud. aprobará el próximo parcial de la materia". ¿Qué deseás que sea B?

29. Te encontrás con cinco personas de la Isla, A, B, C, D y E. Mientras hablan, respondé las preguntas. En cada momento, todo lo dicho hasta ese punto es válido.

    a) A dice: "D y yo somos del mismo tipo". ¿Qué es D?

    b) E dice: "Si B es caballero, entonces C es caballero", y C dice: "Si B es pícaro, entonces A es caballero". ¿Qué es E?

    c) D dice: "A y C son de distinto tipo". ¿Qué son A, B y C?

30. En la *Isla de Caballeros y Pícaros*, nos encontramos con Alberto, Bernardo, Carlos que están chismoseando. Alberto comenta: "¡Si Bernardo fuera un caballero, Daniel y Eduardo también lo serían!". Bernardo agrega: "Daniel sí es un caballero, y Carlos también". Carlos deduce: "Si Daniel es caballero, entonces Eduardo también debe serlo".

    ¿Qué es Alberto?

31. En la *Isla de Caballeros y Pícaros*, nos encontramos con con Alberto, Bernardo y Carlos. Alberto compara: "Bernardo siempre dice la verdad, y Daniel siempre miente". Bernardo contesta: "Si Daniel miente como se dijo, entonces Carlos es caballero". Carlos confirma: "Eso, soy caballero, pero Daniel también".

    ¿Qué es Alberto? ¿Se puede saber qué es Daniel?

32. En la *Isla de Caballeros y Pícaros* hay un gran quilombo entre Ana, Beatriz, Catalina y Diana. Catalina empieza: "Belinda es una mentirosa, menos mal que de Ana sí te podés fiar, siempre dice la verdad.". Belinda, enojadísima, contesta: "Si Diana miente, entonces Catalina también!". Ana responde: "Pero si Catalina dice la verdad, Diana también!".

    ¿Nos podemos fiar de Catalina? ¿Dice la verdad?

    ¿Se puede saber si Diana dice la verdad?

33. En `haskell` no existen funciones predefinidas para los operdores $\Rightarrow$, $\not\equiv$ y $\Leftarrow$. Definí funciones que se comporten como estos operadores (en una sola línea, sin análisis por casos).

34. Redefiní las funciones de los ítems c) y g) del ejercicio 19, h), i), j) y o) del ejercicio 22 de la Guía 1, utilizando operadores booleanos para eliminar todos los análisis por casos. Por ejemplo, en el ítem a) del ejercicio 19 hay que definir una función *entre0y9* : $Int \to Bool$, que dado un entero devuelva *True* si el entero se encuentra entre 0 y 9. Una solución posible al momento de resolver la Guía 1 era:

$$\begin{array}{rl} \mathit{entre0y9}.n \doteq (& 0 \leq n \wedge n \leq 9 \to \mathit{True} \\ & \square\, 0 > n \vee n > 9 \to \mathit{False} \\ ) & \end{array}$$

Si observamos con atención nos daremos cuenta que el valor de verdad devuelto en cada caso, se corresponde con el valor de la guarda $0 \leq n \wedge n \leq 9$. Por lo tanto ahora podemos definir la función *entre0y9* directamente como:

$$\mathit{entre0y9}.n \doteq 0 \leq n \wedge n \leq 9$$

35. Definí funciones por recursión y/o composición para cada una de las siguientes descripciones. Luego evaluá manualmente la función para los valores de cada ejemplo justificando cada paso realizado. Programalas en `haskell` y verificá los resultados obtenidos. Por ejemplo:

Enunciado: *ambospositivos* : $Int \to Int \to Bool$, que dados dos enteros devuelve *True* si ambos son positivos.

Por ejemplo *ambospositivos*.$2.(-5) = \mathit{False}$

Solución:

$$\begin{array}{rl} \mathit{ambospositivos} : & Int \to Int \to Bool \\ \mathit{ambospositivos}.n.m \doteq & (n \geq 0) \wedge (m \geq 0) \end{array}$$

```haskell
ambospositivos :: Int -> Int -> Bool
ambospositivos n m = (n >= 0) && (m >= 0)
```

$$\begin{array}{ll} & \mathit{ambospositivos}.2.(-5) \\ \equiv & \{ \text{ def. de } \mathit{ambospositivos} \} \\ & \underline{(2 \geq 0)} \wedge (-5 \geq 0) \\ \equiv & \{ \text{ aritmética } \} \\ & \mathit{True} \wedge (-5 \geq 0) \\ \equiv & \{ \text{ Elemento neutro de } \wedge \} \\ & -5 \geq 0 \\ \equiv & \{ \text{ aritmética } \} \\ & \mathit{False} \end{array}$$

```
Main> ambospositivos 2 (-5)
False
```

a) *esMultiplo* : $Int \to Int \to Bool$ que dado enteros n y m devuelve *True* si n es múltiplo de m.

   Por ejemplo: *esMultiplo.16.4* $\equiv$ *True*

b) *esVaciaOPrimer0* : $[Int] \to Bool$ que dada una lista decide si es vacía o bien su primer elemento es 0.

   Por ejemplo: *esVaciaOPrimer0.[0,1,2]* $\equiv$ *True*

c) *bisiesto* : $Int \to Bool$ que determina si un año es bisiesto. Recordar que los años bisiestos son aquellos que son divisibles por 4 pero no por 100, a menos que también lo sean por 400.

   Por ejemplo: *bisiesto*.$1900 \equiv \mathit{False}$, y *bisiesto*.$2000 \equiv \mathit{True}$

d) *ordenada* : $[Int] \to Bool$ que decide si una lista está ordenada de menor a mayor.

   Por ejemplo: *ordenada*.$[1, 2, 3, 2] \equiv False$

e) *capicua* : $[A] \to Bool$, que determina si una lista es palíndromo, esto es, que se lee igual de un lado que del otro.

   Por ejemplo: *capicua*.$[1, 2, 3, 2, 1] \equiv \mathit{True}$

f) *listasMayorQue* : $Int \to [[A]] \to Bool$ que dado un número n y una lista de listas, determina si cada una de ellas tiene al menos n elementos.

   Por ejemplo: *listasMayorQue*.$3.[[1, 2, 3, 4], [0, 1], [5]] \equiv \mathit{False}$

g) *listasVacias* : $[[A]] \to Bool$ que dada una lista de listas, determina si al menos una de ellas es vacía.

   Por ejemplo: *listasVacias*.$[[1, 2, 3], [\ ], [5]] \equiv \mathit{True}$

36. Demostrá las siguientes propiedades del máximo (que en el práctico 1 consideramos como axiomas), utilizando la siguiente definición que relaciona a max con $\leq$ para cualquier valor de k:

$$p \max q \leq k \equiv p \leq k \wedge q \leq k$$

y el teorema de *Igualdad indirecta*, que relaciona el $=$ con el $\leq$ para cualquier valor de k:

$$p = q \equiv p \leq k \equiv q \leq k$$

Por ejemplo, demostramos la *Idempotencia* ($x \max x = x$):

$$\begin{array}{ll} & x \max x \leq k \\ \equiv & \{ \text{ Definición de max } \} \\ & x \leq k \wedge x \leq k \\ \equiv & \{ \text{ Idempotencia de } \wedge \text{ } \} \\ & x \leq k \end{array}$$

Hemos demostrado $x \max x \leq k \;\equiv\; x \leq k$, luego

$$\begin{array}{ll} & x \max x \leq k \equiv x \leq k \\ \equiv & \{ \text{ Igualdad indirecta } \} \\ & x \max x = x \end{array}$$

a) *Asociatividad:* $x \max (y \max z) = (x \max y) \max z$.

b) *Conmutatividad:* $x \max y = y \max x$.

c) *Distributividad respecto a* $+$: $x + (y \max z) = (x + y) \max (x + z)$.

37. Suponiendo $n \geq 0$, demostrá por inducción las siguientes propiedades de $+\!\!+$ con . y $\uparrow$:

a) $(xs +\!\!+ ys).n = (n < \#xs \rightarrow xs.n$
$\quad\Box n \geq \#xs \rightarrow ys.(n - \#xs)$
$)$

b) $(xs +\!\!+ ys) \uparrow n = (n < \#xs \rightarrow xs \uparrow n$
$\quad\Box n \geq \#xs \rightarrow xs +\!\!+ (ys \uparrow (n - \#xs))$
$)$

Ayuda: Para el ítem *a*) debés demostrar por inducción (doble!) la validez de las siguientes fórmulas:

i) $n \geq 0 \wedge n < \#xs \Rightarrow (xs +\!\!+ ys).n = xs.n$

ii) $n \geq 0 \wedge n \geq \#xs \Rightarrow (xs +\!\!+ ys).n = ys.(n - \#xs)$

38. Encontrá la propiedad análoga a la del ejercicio anterior, ítem *b*) respecto a $\downarrow$ y demostrala.

39. Demostrá por inducción que cuando n es par, la fórmula $\overbrace{p \equiv \cdots \equiv p}^{n}$ es un teorema. Notá que esta fórmula es una generalización de los ítems *a*), *b*) y *c*) del ejercicio 19.

Ejercicios de práctica extra

A continuación incluímos mas ejercicios de Cálculo Proposicional. Dado que la capacidad de hacer demostraciones formales de este tipo es uno de los puntos mas importante de la materia, te recomendamos que resuelvas tantos ejercicios como te sea posible.

37. En las siguientes demostraciones se ha utilizado la **Regla Dorada** para transformar una expresión en otra. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ que explican como se aplicó la regla.

a)
$$\begin{array}{ll} & (r \Rightarrow z \vee q) \wedge (r \equiv s) \equiv (r \Rightarrow z \vee q) \equiv (r \equiv s) \\ \equiv & \{ \text{ (Regla Dorada)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \text{ } \} \\ & (r \Rightarrow z \vee q) \vee (r \equiv s) \end{array}$$

b) $\quad (z \wedge r) \vee (m \Rightarrow n \vee r) \equiv (z \wedge r) \equiv (m \Rightarrow n \vee r)$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(z \wedge r) \wedge (m \Rightarrow n \vee r)$

c) $\quad (p \vee (q \equiv r)) \wedge (m \Rightarrow n)$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(p \vee (q \equiv r)) \vee (m \Rightarrow n) \equiv (p \vee (q \equiv r)) \equiv (m \Rightarrow n)$

d) $\quad (p \vee q \vee r) \vee (s \vee t \vee z)$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(p \vee q \vee r) \wedge (s \vee t \vee z) \equiv (p \vee q \vee r) \equiv (s \vee t \vee z)$

e) $\quad ((p \vee q) \Rightarrow r) \equiv z \wedge r$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$((p \vee q) \Rightarrow r) \vee z \wedge r \equiv ((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge z \wedge r$

f) $\quad p \Rightarrow q$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(p \Rightarrow q) \vee z \equiv z \equiv p \Rightarrow q \wedge z$

38. En las siguientes demostraciones se ha utilizado la **Teorema Estrella** para transformar una expresión en otra. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ que explican como se aplicó la regla.

a) $\quad (r \equiv s) \vee (p \Rightarrow (q \vee r))$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(r \equiv s) \vee \neg(p \Rightarrow (q \vee r)) \equiv (r \equiv s)$

b) $\quad (r \Rightarrow s \vee q) \vee \neg(z \vee r)$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(r \Rightarrow s \vee q) \equiv (r \Rightarrow s \vee q) \vee (z \vee r)$

c) $\quad (z \vee (s \wedge t)) \vee (p \Rightarrow q) \equiv (z \vee (s \wedge t)) \vee \neg(p \Rightarrow q)$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(z \vee (s \wedge t))$

d) $\quad (s \vee (r \wedge m))$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(s \vee (r \wedge m)) \vee z \equiv (s \vee (r \wedge m)) \vee \neg z$

39. Encontrá el axioma o teorema y la sustitución utilizados para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones

Ayuda: En todos los casos se trata de axiomas o teoremas con $\vee$ y/o $\equiv$.

a) $\quad ((p \wedge r \Rightarrow q) \vee (r \equiv p \wedge r)) \vee z$
$\equiv \{ \quad \}$
$(p \wedge r \Rightarrow q) \vee ((r \equiv p \wedge r) \vee z)$

b) $\quad (p \wedge r \Rightarrow q) \vee (r \equiv p \wedge r)$
$\equiv \{ \quad \}$
$(r \equiv p \wedge r) \vee (p \wedge r \Rightarrow q)$

c) $\quad (q \Rightarrow (z \equiv r)) \vee (p \vee (r \wedge q)))$
$\equiv \{ \quad \}$
$((q \Rightarrow (z \equiv r)) \vee) p \vee (r \wedge q))$

d) $\quad (p \wedge (r \vee z) \Rightarrow q) \vee (p \wedge (r \vee z) \Rightarrow q)$
$\equiv \{ \quad \}$
$(p \wedge (r \vee z) \Rightarrow q)$

e) $\quad (r \wedge s \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow z) \equiv (r \wedge s \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
$\equiv \{ \quad \}$
$(r \wedge s \Rightarrow q) \vee ((q \Rightarrow z) \equiv (p \Rightarrow r))$

f) $\quad (s \Rightarrow q) \vee (\neg z \wedge p) \equiv (s \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
$\equiv \{ \quad \}$
$((p \Rightarrow r) \equiv \neg z) \vee (r \wedge s \Rightarrow q)$

40. En las siguientes pasos deductivos se han eliminado todas las conjunciones e implicaciones. Encontrá el axioma o teorema y la sustitución utilizados para transformar una expresión en la otra.

a) $\quad (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge s \equiv q)$
$\equiv \{ \quad \}$
$(p \vee q) \vee (r \wedge s \equiv q) \equiv (r \wedge s \equiv q)$

b) $\quad (p \wedge (r \vee s)) \Rightarrow (p \equiv q)$
$\equiv \{ \quad \}$
$\neg(p \wedge (r \vee s)) \vee (p \equiv q)$

c) $\quad (r \vee s \equiv z) \wedge (p \wedge q) \equiv (r \vee s \equiv z) \equiv (p \wedge q)$
$\equiv \{ \quad \}$
$(r \vee s \equiv z) \vee (p \wedge q)$

d) $\quad (p \equiv q) \Rightarrow (z \wedge q)$
$\equiv \{ \quad \}$
$\neg(p \equiv q) \vee (z \wedge q)$

e) $\quad (p \vee (q \equiv r)) \Rightarrow (z \wedge s \equiv p)$
$\equiv \{ \quad \}$
$(p \vee (q \equiv r)) \vee (z \wedge s \equiv p) \equiv (z \wedge s \equiv p)$

f) $\quad (r \vee s) \wedge (p \wedge r \equiv z) \equiv (r \vee s)$
$\equiv \{ \quad \}$
$(r \vee s) \vee (p \wedge r \equiv z) \equiv (p \wedge r \equiv z)$

41. Demostrá (y verificá en `yahc`) que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado, sin necesidad de especificar la sustitución utilizada.

   a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$.
   b) $p \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p$.
   c) $p \vee (p \Rightarrow q) \equiv \mathit{True}$.
   d) $p \vee (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$.
   e) $\mathit{False} \Rightarrow p \equiv \mathit{True}$.
   f) $p \Rightarrow \mathit{True} \equiv \mathit{True}$.
   g) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow \neg q \vee r)$.
   h) *Consecuencia de True*: $\mathit{True} \Rightarrow p \equiv p$.
   i) *Absurdo*: $p \Rightarrow \mathit{False} \equiv \neg p$.
   j) *Relación* $\Rightarrow$, $\Leftarrow$: $p \Rightarrow q \equiv q \Leftarrow p$.
   k) *Intercambio para* $\Rightarrow$: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.
   l) *Distributividad a izquierda de* $\Rightarrow$ *con* $\equiv$: $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow r$.
   m) *Doble implicación*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \equiv q$.
   n) *Contrarrecíproca*: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.
   ñ) *Transitividad*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
   o) *Monotonía conjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$.
   p) *Monotonía disjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$.
   q) *Relación entre* $\vee$ *y* $\not\equiv$: $p \not\equiv q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
   r) *Conmutatividad de la discrepancia*: $(p \not\equiv q) \equiv (q \not\equiv p)$
   s) *Asociatividad mutua equivalencia-discrepancia*: $(p \equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \not\equiv r)$
   t) *Teorema de Intercambiabilidad entre* $\not\equiv$ *y* $\equiv$: $p \equiv q \not\equiv r \equiv p \not\equiv q \equiv r$