Introducción a los algoritmos - Segundo cuatrimestre 2010

Guía 3: Cálculo de Predicados

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso i Alemany, Luciana Benotti, Paula Estrella

La lógica de cuantificadores o lógica de primer orden es el sistema lógico estándar que formaliza el sistema deductivo natural. El objetivo general de esta guía es aprender a manipular fórmulas con cuantificadores universal (∀) y existencial (∃), tanto para interpretar su significado, como para utilizarlas para expresar propiedades, modelar problemas de razonamiento, etc. Uno de los objetivos específicos más importantes es extender las habilidades logradas en el cálculo proposicional, para realizar demostraciones formales en este sistema lógico.

Evaluación y Especificación

La lógica de cuantificadores extiende la lógica proposicional, incorporando dos operadores de ***cuantificación****. Si expresamos un* predicado *con $T.x$, por ejemplo*

$$T.x \doteq \text{ x es múltiplo de 3}$$

el cuantificador universal ∀ permite expresar la fórmula $T.x$, se satisface para todo valor posible de x, en este caso que todo x es múltiplo de 3. Esto se denota por $\langle \forall x :: T.x \rangle$. Por otro lado, el cuantificador existencial ∃, expresa que la propiedad es satisfecha por al menos un valor posible de x, lo que se denota como $\langle \exists x :: T.x \rangle$. En este caso, existe un x que es múltiplo de 3.

Por ejemplo, si suponemos que x es una variable del universo de los hombres, y el predicado mortal.x dice que x es mortal, podemos expresar la sentencia "Todos los hombres son mortales" con la fórmula:

$$\langle \forall x :: mortal.x \rangle$$

En general, tanto para ∀ como para ∃, no suponemos que las variables pertenecen a ningún universo dado. Para distinguir entonces el universo al que nos referimos, utilizamos predicados arbitrarios $R.x$, quedando las fórmulas denotadas como:

$$\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \qquad\qquad \langle \exists x : R.x : T.x \rangle$$

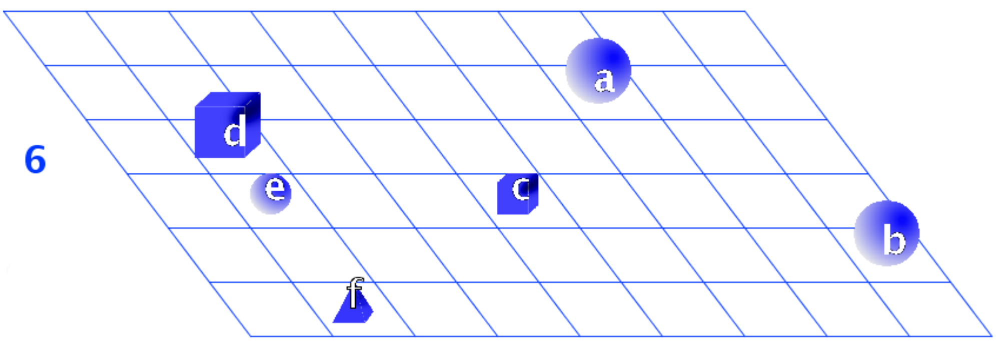
Suponiendo el significado obvio para el predicado hombre, el ejemplo anterior se formaliza como:

$$\langle \forall x : hombre.x : mortal.x \rangle$$

Notá que por la notación fija de las expresiones cuantificadas (los ⟨, ⟩, :) no puede haber confusiones con la precedencia y asociatividad.

En los siguientes ejercicios se trabaja intentado clarificar el significado de los nuevos operadores de cuantificación, para lograr la capacidad de leer *y* escribir *fórmulas que los involucran.*

1. Dado el siguiente mundo



   I) decidí si las siguientes sentencias son satisfechas o no. Por ejemplo, la sentencia "Hay un cubo grande" se satisface por el objeto d. Sin embargo, la frase "Todas las esferas son grandes", no se satisface a causa de la esfera pequeña e.

II) Expresá formalmente cada sentencia y verificala en `ithaca`.

a) `a` y `b` tienen la misma forma.

b) `f` está entre `d` y `e`.

c) Todas las pirámides son pequeñas.

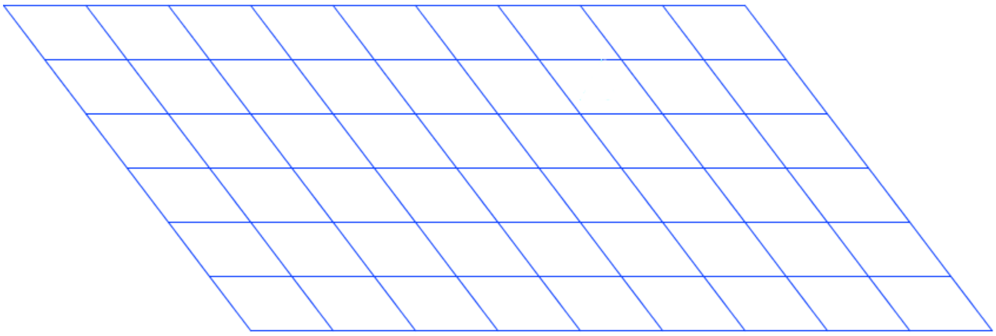
d) Existen cubos pequeños.

e) `a` está a la derecha de todo.

f) Nada está a la derecha de `b`.

g) Cada cubo está a la izquierda de una esfera.

2. Construí un mundo en el que se satisfagan progresivamente cada una de las siguientes sentencias, utilizando los objetos disponibles en `ithaca` (cubos, esferas y pirámides, pequeñas o grandes). Luego formalizá las sentencias y verificá que efectivamente se satisfagan. Notá que muchos enunciados en lenguaje natural se traducen por la misma fórmula.



a) Algo es grande.

b) Hay un cubo.

c) Hay un cubo grande.

d) Un cubo grande está a la izquierda de `b`.

e) `b` está a la derecha de un gran cubo.

f) Algo que está a la izquierda de `b` está detras de `c`.

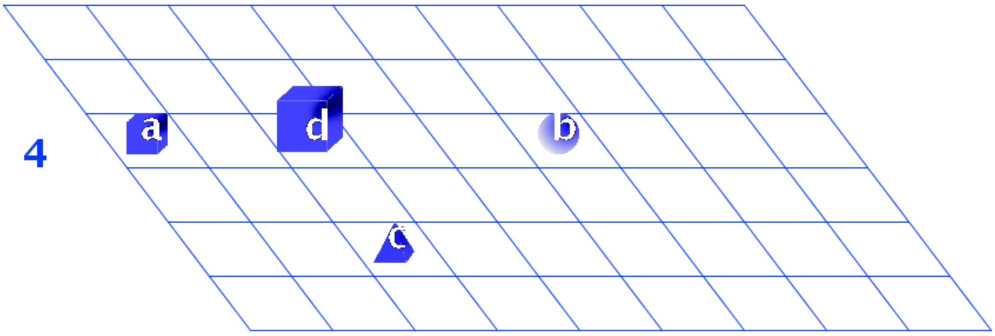
g) Un cubo grande que está a la izquierda de `b` está detrás de `c`.

h) Alguna esfera no es grande.

i) Algo no es un esfera grande.

j) `b` no está a la izquierda de un cubo.

3. Utilizando `ithaca` abrí el archivo `mundo2.itk`, que se muestra a continuación:



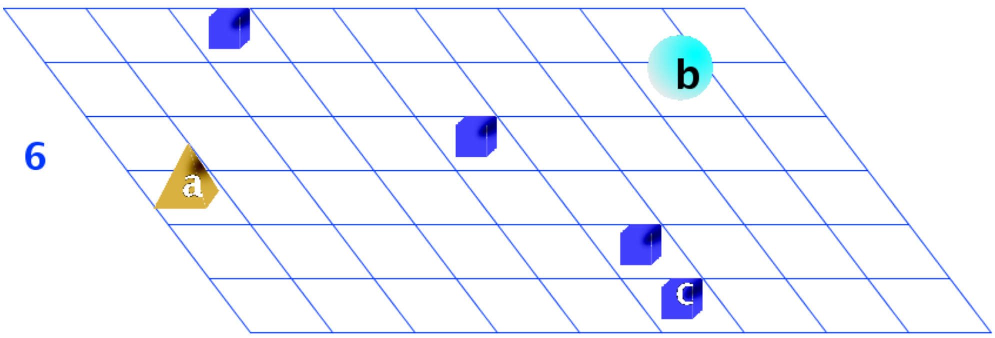
Notá que todos los enunciados del ejercicio anterior se satisfacen en este mundo. Luego,

a) Introducí tus formalizaciones de los enunciados y verificá que se satisfagan. Si no es así, te equivocaste en algo ¿podés encontrar donde está el error de la traducción?

b) Mové el cubo grande a la esquina trasera derecha del tablero. Observá que los enunciados d, e, g y j no se satisfacen mientras que los restantes siguen valiendo. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

c) A partir del mundo original, mové c hacia atrás por su propia columna hasta la fila final y hacé grande a b. Ahora los enunciados f, g y h no se satisfacen. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

4. Utilizando `ithaca` abrí el archivo `mundo3.itk`, que se muestra a continuación:



a) Formalizá los siguientes enunciados y verificá que se satisfacen. Si no es así, te equivocaste en algo ¿podés encontrar donde está el error de la traducción?

1) Todos los cubos son pequeños.
2) Cada cubo pequeño está a la derecha de `a`.
3) Todas las esferas son grandes.
4) `a` está a la izquierda de toda esfera.
5) Cada cubo está o bien delante de `b` o detrás de `a`.
6) Todo cubo está a la derecha de `a` y a la izquierda de `b`.
7) Todo lo que es más pequeño que `a` es un cubo.
8) Ninguna esfera es pequeña.

9) Si algo es un cubo, entonces está a la derecha de `a` y a la izquierda de `b`.

b) Mové `a` hacia la esquina trasera derecha del tablero. Observá que los enunciados $2, 4, 5, 6$ y 9 no se satisfacen mientras que los restantes siguen valiendo. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

c) Abrí el archivo `mundo4.itk`. Observá que los enunciados $2, 3, 4$ y 7 se satisfacen mientras que los restantes no. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

d) Abrí el archivo `mundo5.itk`. Observá que los enunciados $2, 3, 4, 7$ y 8 se satisfacen, mientras que los restantes no. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

5. Construir un modelo como los de `ithaca`, en los que se satisfagan, simultáneamente, las siguientes propiedades

   a) $\langle \forall x : esfera.x : rojo.x \equiv grande.x \rangle$

   b) $\langle \exists x :: \langle \exists y : \neg(x = y) : grande.x \equiv (\neg rojo.y) \rangle \rangle$

   c) $\langle \forall x : \neg esfera.x : \langle \exists y :: esfera.y \wedge rojo.y \rangle \rangle$

   d) $\langle \forall x : grande.x : \langle \forall y :: (\neg rojo.y) \equiv pirámide.y \rangle \rangle$

   Para evitar confusiones, dar el dibujo de como sería el modelo, nombrando en el dibujo todos los elementos, y luedo indicar, para cada elemento que propiedades (forma, color, tamaño) tiene. Ejemplo "e_1 es esfera, roja, grande".

6. Construí un *único* modelo como los de `ithaca`, en el que se satisfagan, **simultáneamente**, las siguientes propiedades:

   a) $\langle \forall x : \neg rojo.x \vee pirámide.x : \langle \exists y : (x = y) : grande.y \rangle \rangle$

   b) $\langle \exists x : rojo.x : \langle \exists y :: rojo.x \equiv \neg rojo.y \rangle \rangle$

   c) $\langle \forall x : cubo.x : \langle \exists y : \neg(x = y) : pirámide.y \rangle \rangle$

   d) $\langle \forall x : rojo.x : cubo.x \wedge \langle \exists y :: grande.x \rangle \rangle$

   Para evitar confusiones, dibujá el modelo nombrando cada figura, y luedo indicá las propiedades (forma, color, tamaño) que cada una tiene. Por ejemplo "e_1 es pirámide, roja, grande".

7. Expresá el significado de cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural. Por ejemplo, en la fórmula
$$\langle \forall i \, : \, 0 \leq i < \#xs \, : \, xs.i = 0 \rangle$$
   debemos suponer que la variable xs es de tipo lista, para que el tipado sea correcto. Las siguientes sentencias son todas traducciones de esta fórmula al lenguaje natural:

   "Todos los elementos de la lista xs son ceros"
   "La lista xs está compuesta únicamente por ceros"
   "La lista xs no tiene otro valor que cero"...

   a) $\langle \forall i \, : \, 0 \leq i < N \wedge N \leq \#xs \, : \, xs.i \geq 0 \rangle$

   b) $\langle \exists i \, : \, 0 \leq i < N \wedge N \leq \#xs \, : \, xs.i = 0 \rangle$

   c) $\langle \forall p, q \, : \, 0 \leq p \wedge 0 \leq q \wedge p + q = \#xs - 1 \, : \, xs.p = xs.q \rangle$.

   d) $\#xs = \#ys \Rightarrow \langle \exists i \, : \, 0 \leq i < \#xs \min \#ys \, : \, xs.i \neq ys.i \rangle$.

   e) $\langle \forall x \, : \, x \in Num \, : \, \langle \exists y \, : \, y \in Int \, : \, x < y \rangle \rangle$

   f) $\langle \exists x \, : \, x \in Num \, : \, \langle \forall y \, : \, y \in Int \, : \, x < y \rangle \rangle$ ¿Es lo mismo que la anterior?

   g) $\langle \forall x, z \, : \, x, z \in Num \wedge x \neq z \, : \, \langle \exists y \, : \, y \in Num \, : \, x < y < z \rangle \rangle$.

8. Formalizá las siguientes sentencias escritas en lenguaje natural, utilizando cuantificadores y predicados arbitrarios para aquellas propiedades elementales. Por ejemplo, para la sentencia “Hay niños presentes”, podemos utilizar los predicados *serNiño* y *estarPresente* con el significado obvio. Así podemos formalizar esta sentencia con la fórmula:

$$\langle \exists x \ : \ \mathit{serNiño}.x \ : \ \mathit{estarPresente}.x \rangle$$

Si interpretamos que la utilización del plural en la sentencia del lenguaje natural indica que hay mas de un niño presente, podemos utilizar en cambio la fórmula:

$$\langle \exists x, y \ : \ x \neq y \wedge \mathit{serNiño}.x \wedge \mathit{serNiño}.y \ : \ \mathit{estarPresente}.x \wedge \mathit{estarPresente}.y \rangle$$

Ambas interpretaciones, y sendas fórmulas son correctas.

   a) Nada que valga la pena tener puede obtenerse fácilmente.
   b) Los caballos de carrera son todos de pura raza.
   c) Todo entero es par o impar.
   d) Todo entero es divisible por un primo.
   e) Sólo se admiten blancos.
   f) No se admiten negros.
   ¿Las dos sentencias anteriores dicen lo mismo?
   g) El producto de dos impares es impar
   h) El producto de un par y un impar es par.
   i) Todo entero positivo es suma de dos cuadrados.
   j) Existe un entero no negativo más chico.
   k) Dados dos números enteros positivos, existe un tercer entero tal que el primer entero multiplicado por el tercer entero es mayor que el segundo entero.
   l) Un entero positivo es primo si y sólo si, ningún número distinto de él y de 1 lo divide.
   m) x está en la lista xs.
   n) x ocurre exactamente dos veces en xs.
   ñ) La lista xs consiste de 0's y 1's.
   o) Si el 1 está en xs, entonces también el 0 está.
   p) La lista xs contiene al menos un $true$.
   q) Si xs es no vacía, su primer elemento es 0.
   r) Todos los elementos de xs son iguales
   Si lo resolviste con dos o mas cuantificadores, intentá hacerlo utilizando sólo uno.
   s) Las listas xs e ys tienen los mismos elementos.
   t) Todos los elementos de xs tienen al menos un elemento.
   ¿Cuál debe ser el tipo de xs?
   u) La lista xs es capicúa.
   v) n es el menor entero par en xs.
   w) x es el segundo valor más grande de xs.
   x) La lista xs está ordenada de manera decreciente
   Si lo resolviste con dos o mas cuantificadores, intentá hacerlo utilizando sólo uno.
   y) xs es un segmento de ys.

9. Evaluá las siguientes expresiones utilizando los axiomas de cuantificadores principalmente los de partición de rango y rango unitario.

a) $\langle \forall i \,:\, 0 \le i < 4 \,:\, [1, -2, 5, 9].i \ge 0 \rangle$

b) $\langle \exists j \,:\, 0 \le i < 3 \,:\, [2, 4, -5, 2].i < 0 \rangle$

10. Definí funciones por recursión y/o composición para cada una de las siguientes descripciones. Luego programalas en `haskell`.

    a) $paratodo : [A] \to (A \to Bool) \to Bool$, que dada una lista xs de elementos de tipo A y una función T que toma elementos de este tipo y devuelve valores booleanos (es decir un predicado), determina si vale $\langle \forall i \,:\, 0 \le i < \#xs \,:\, T.(xs.i) \rangle$.

    b) $existe : [A] \to (A \to Bool) \to Bool$, que dada una lista xs de elementos de tipo A y una función T que toma elementos de este tipo y devuelve valores booleanos (es decir un predicado), determina si vale $\langle \exists i \,:\, 0 \le i < \#xs \,:\, T.(xs.i) \rangle$.

Demostraciones con cuantificadores

A la hora de demostrar un teorema de la forma $P \equiv Q$, acostumbramos a hacerlo de dos maneras posibles:

$$
\begin{array}{ll}
 & P \equiv Q \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_1\ \} \\
 & P_1 \equiv Q_1 \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_2\ \} \\
 & P_2 \equiv Q_2 \\
 & \vdots \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_n\ \} \\
 & P_n \equiv Q_n \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_{n+1}\ \} \\
 & \textit{True}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
 & P \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_1\ \} \\
 & P_1 \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_2\ \} \\
 & P_2 \\
 & \vdots \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_n\ \} \\
 & P_n \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_{n+1}\ \} \\
 & Q
\end{array}
$$

Una forma de interpretar la segunda forma es apelando a la transitividad de la equivalencia ($\equiv$): la fórmula $P \equiv P_1$ se cumple por la Razón$_1$ y $P_1 \equiv P_2$ por la Razón$_2$, por lo tanto vale $P \equiv P_2$. Pero sabemos además que $P_2 \equiv P_3$ justificado por la Razón$_3$, luego nuevamente por transitividad obtenemos que $P \equiv P_3$. Podemos aplicar sucesivamente este razonamiento hasta demostrar que $P \equiv Q$.

Ahora, ¿qué sucede cuando tenemos que demostrar una fórmula de la forma $P \Rightarrow Q$? En este caso también podemos aprovechar la transitividad de la implicación ($\Rightarrow$) junto con la de la equivalencia ($\equiv$). En este tipo de demostraciones podemos justificar ciertos pasos utilizando teoremas que involucren $\Rightarrow$, por ejemplo debilitamiento de $\wedge$, modus ponens, modus tollens, y otros que demostremos para una situación particular. Además podemos utilizar la ***monotonía de** $\forall$ **y el*** $\exists$ *para aplicar estos teoremas dentro de una expresión cuantificada, de la siguiente forma:*

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle \forall x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \\
\Rightarrow & \{\ \textit{Monotonía y } T.x \Rightarrow S.x\ \} \\
 & \langle \forall x \,:\, R.x \,:\, S.x \rangle
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
 & \langle \exists x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \\
\Rightarrow & \{\ \textit{Monotonía y } T.x \Rightarrow S.x\ \} \\
 & \langle \exists x \,:\, R.x \,:\, S.x \rangle
\end{array}
$$

con lo cual se demuestra $\langle \forall x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x \,:\, R.x \,:\, S.x \rangle$ por un lado, y $\langle \exists x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x \,:\, R.x \,:\, S.x \rangle$ por otro, siempre que $T.x \Rightarrow S.x$ esté demostrado.

En los siguientes ejercicios se deben hacer demostraciones en el Cálculo de Predicados, utilizando los axiomas y teoremas sobre cuantificadores, además de los axiomas y teoremas del Cálculo Proposicional que venimos utilizando.

9. En el ejercicio 23 de la Guía 2 se demuestra la fórmula $(i \Rightarrow s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$ utilizando solo pasos de equivalencia. Completá la siguiente demostración análoga que utiliza pasos de implicación. Compará ambas demostraciones.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{(i \Rightarrow s \vee p)} \wedge \neg s \\
\equiv & \{\ \text{Caracterización de } \Rightarrow\ \} \\
 & \ldots \\
\equiv & \{\ \text{Conmutatividad de } \vee\ \} \\
 & (\underline{\neg i \vee p} \vee s) \wedge \neg s \\
\equiv & \{\ \text{Caracterización de } \Rightarrow\ \}
\end{array}
$$

$\ldots$

$\equiv$ { Distributividad de $\wedge$ con $\vee$ }

$((i \Rightarrow p) \wedge \neg s) \vee \underline{(s \wedge \neg s)}$

$\equiv$ { ... }

$((i \Rightarrow p) \wedge \neg s) \vee False$

$\equiv$ { ... }

$(i \Rightarrow p) \wedge \neg s$

$\Rightarrow$ { Debilitamiento para $\wedge$ }

$i \Rightarrow p$

10. Analizá las siguientes "demostraciones". ¿Son correctas? ¿Qué se demuestra en cada caso?

a)
p
$\equiv$ { Neutro de $\wedge$ }
$p \wedge True$
$\Rightarrow$ { Debilitamiento para $\wedge$ }
$True$

b)
$(p \Rightarrow q) \wedge p$
$\Rightarrow$ { *modus ponens* }
q
$\Leftarrow$ { Debilitamiento para $\wedge$ }
$r \wedge q$

11. Demostrá que las siguientes fórmulas son válidas, justificando en cada paso el axioma o teorema utilizado. Prestá atención de no utilizar conocimiento del "mundo real" mas allá de los axiomas y teoremas del Cálculo de Predicados.

a) $\langle \forall x : esfera.x : grande.x \rangle \equiv \langle \forall x : \neg grande.x : \neg esfera.x \rangle$

b) $\langle \exists x : cubo.x : pequeño.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : cubo.x \rangle$

c) $\neg\langle \exists x : : pirámide.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : piramide.x : roja.x \rangle$

d) $\langle \exists x : : cubo.x \rangle \wedge \langle \forall y : : grande.y \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : cubo.x \wedge grande.x \rangle$

En todos los items anteriores, ¿es posible cambiar los predicados *esfera*, *grande*, *cubo*, etc. por predicados arbitrarios R, T, S, etc. manteniendo la validez de las fórmulas? Dicho de otro modo ¿la validez de las formulas anteriores depende de los predicados específicos *esfera*, *grande*, *cubo*, etc?

12. Demostrá justificando cada paso *únicamente* con axiomas, los siguientes teoremas sobre el cuantificador existencial:

a) *Intercambio entre rango y término:* $\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \equiv \langle \exists x : : R.x \wedge T.x \rangle$.

b) *Distributividad de $\wedge$ con $\exists$:* $X \wedge \langle \exists x : : T.x \rangle \equiv \langle \exists x : : X \wedge T.x \rangle$, siempre que x no ocurra en X.

c) *Distributividad de $\vee$ con $\exists$:* $\langle \exists x : : T.x \rangle \vee \langle \exists x : : U.x \rangle \equiv \langle \exists x : : T.x \vee U.x \rangle$.

d) *Rango unitario:* $\langle \exists x : x = Y : T.x \rangle \equiv T.Y$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

e) *Intercambio de cuantificadores:* $\langle \exists x : : \langle \exists y : : T.x.y \rangle \rangle \equiv \langle \exists y : : \langle \exists x : : T.x.y \rangle \rangle$.

f) *Rango vacío:* $\langle \exists x : False : T.x \rangle \equiv False$.

g) *Testigo:* $T.Y \Rightarrow \langle \exists x : : T.x \rangle$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

h) Enunciá y demostrá la propiedad de *Cambio de Variable* para el cuantificador existencial.

13. La siguiente secuencia de pasos:

$\neg\langle \exists x : R.x : T.x \rangle$

$\equiv$ { Intercambio (dos veces) }

$\neg\langle \exists x : T.x : R.x \rangle$

$\equiv$ { De Morgan (generalizado) }

$\langle \forall x : T.x : \neg R.x \rangle$

$\equiv$ { Intercambio }

$\langle \forall x : : T.x \Rightarrow \neg R.x \rangle$

$\Rightarrow$ { Debilitamiento (ej. 14g) }

$\langle \exists x : : T.x \Rightarrow \neg R.x \rangle$

$\equiv$ { Intercambio }

$\langle \exists x : T.x : \neg R.x \rangle$

pretende ser una demostración de la validez de la fórmula:

$$\neg\langle\exists x\,:\,R.x\,:\,T.x\rangle \Rightarrow \langle\exists x\,:\,T.x\,:\,\neg R.x\rangle$$

a) Decidí si efectivamente es una demostración correcta, verificando que cada paso esté justificado apropiadamente.

b) Independientemente de la corrección de la demostración ¿la fórmula enunciada es válida?

14. Demostrá los siguientes teoremas:

a) $\langle\forall x\,:\,:\,T.x\rangle \wedge X \equiv \langle\forall x\,:\,:\,T.x \wedge X\rangle$, siempre que x no ocurra en X.

b) $\langle\forall x\,:\,\langle\exists y\,:\,:\,R.x.y\rangle\,:\,T.x\rangle \equiv \langle\forall x, y\,:\,R.x.y\,:\,T.x\rangle$

c) $\langle\exists x\,:\,R.x\,:\,T.x\rangle \wedge \langle\forall x\,:\,R.x\,:\,S.x\rangle \Rightarrow \langle\exists x\,:\,R.x\,:\,T.x \wedge S.x\rangle$

d) $\langle\forall x\,:\,:\,T.x \equiv \neg S.x\rangle \Rightarrow (\langle\exists x\,:\,:\,T.x\rangle \equiv \neg\langle\forall x\,:\,:\,S.x\rangle)$

e) $\langle\exists x\,:\,:\,T.x \Rightarrow S.x\rangle \equiv (\langle\forall x\,:\,:\,T.x\rangle \Rightarrow \langle\exists x\,:\,:\,S.x\rangle)$

f) $(\langle\exists x\,:\,:\,T.x\rangle \Rightarrow \langle\forall x\,:\,:\,S.x\rangle) \Rightarrow \langle\forall x\,:\,T.x\,:\,S.x\rangle$

g) $\langle\forall x\,:\,:\,T.x\rangle \Rightarrow \langle\exists x\,:\,:\,T.x\rangle$ ¿la fórmula recíproca (es decir, cambiando $\Rightarrow$ por $\Leftarrow$) es válida?

15. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una demostración, ejemplo o contraejemplo.

Ayuda: Podés usar `ithaca` para definir mundos que sirvan como ejemplo de satisfacción de una fórmula, o (contra)ejemplo de invalidez de una fórmula.

a) $\langle\forall x\,:\,\mathit{cubo}.x\,:\,\mathit{pequeño}.x\rangle \Rightarrow (\langle\forall x\,:\,:\,\mathit{cubo}.x\rangle \Rightarrow \langle\forall x\,:\,:\,\mathit{pequeño}.x\rangle)$

b) $\langle\forall x\,:\,\mathit{cubo}.x\,:\,\mathit{pequeño}.x\rangle \Leftarrow (\langle\forall x\,:\,:\,\mathit{cubo}.x\rangle \Rightarrow \langle\forall x\,:\,:\,\mathit{pequeño}.x\rangle)$

c) $(\langle\forall x\,:\,\mathit{esfera}.x\,:\,\mathit{grande}.x\rangle \equiv \langle\forall x\,:\,\mathit{esfera}.x\,:\,\mathit{roja}.x\rangle) \Rightarrow \langle\forall x\,:\,\mathit{esfera}.x\,:\,\mathit{grande}.x \equiv \mathit{roja}.x\rangle$

d) $(\langle\forall x\,:\,\mathit{esfera}.x\,:\,\mathit{grande}.x\rangle \equiv \langle\forall x\,:\,\mathit{esfera}.x\,:\,\mathit{roja}.x\rangle) \Leftarrow \langle\forall x\,:\,\mathit{esfera}.x\,:\,\mathit{grande}.x \equiv \mathit{roja}.x\rangle$

e) $\langle\exists x\,:\,\mathit{pirámide}.x\,:\,\mathit{grande}.x\rangle \wedge \langle\exists x\,:\,\mathit{pirámide}.x\,:\,\mathit{azul}.x\rangle \Rightarrow \langle\exists x\,:\,\mathit{pírámide}.x\,:\,\mathit{grande}.x \wedge \mathit{azul}.x\rangle$

f) $\langle\exists x\,:\,\mathit{pirámide}.x\,:\,\mathit{grande}.x\rangle \wedge \langle\exists x\,:\,\mathit{pirámide}.x\,:\,\mathit{azul}.x\rangle \Leftarrow \langle\exists x\,:\,\mathit{pírámide}.x\,:\,\mathit{grande}.x \wedge \mathit{azul}.x\rangle$

Aplicaciones del Cálculo de Predicados

*Como vimos en la guía 2, el **análisis de razonamientos lógicos** busca determinar si un razonamiento, normalmente descripto en lenguaje natural, es válido o no, es decir, si la conclusión se desprende lógicamente de las hipótesis. Muchos razonamientos, dada su complejidad, no pueden ser modelados en lógica proposicional y resulta necesario utilizar lógica de predicados para lograr modelarlos de forma mas precisa.*

Independientemente de la lógica que utilicemos para modelar un razonamiento con hipótesis (o premisas) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *y conclusión* C*, decimos que es válido si la fórmula* $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ *es un teorema. Nada importa en este caso si la conclusión por si misma es verdad o no en* el mundo real. *Lo único que interesa al razonamiento es si es posible deducir la conclusión a partir de las hipótesis y las reglas de la lógica.*

*Por el contrario, para mostrar la invalidez de un razonamiento es necesario encontrar un ejemplo que contradiga al razonamiento (contraejemplo), esto es, alguna situación (o **modelo**) que cumpla con todas las premisas pero no con la conclusión. Esto muestra que no necesariamente la conclusión se deduce de las hipótesis.*

Si tomamos como ejemplo el siguiente razonamiento (válido):

P_1 : *Ningún argentino tiene derecho a cortar las calles.*
P_2 : *Los ruralistas tienen derecho a cortar las calles.*
C : *Por lo tanto los ruralistas no son argentinos.*

y definimos los siguientes predicados:

$A.x \doteq$ *x es argentino*
$D.x \doteq$ *x tiene derecho a cortar las calles*
$R.x \doteq$ *x es ruralista*

podemos formalizarlo con la fórmula:

$$\langle \forall x : A.x : \neg D.x \rangle \wedge \langle \forall x : R.x : D.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : R.x : \neg A.x \rangle$$

Veamos que es un teorema:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{\langle \forall x : A.x : \neg D.x \rangle} \wedge \underline{\underline{\langle \forall x : R.x : D.x \rangle}} \\
\equiv & \{ \text{ Intercambio rango y término (dos veces) } \} \\
 & \langle \forall x : : A.x \Rightarrow \neg D.x \rangle \wedge \langle \forall x : : R.x \Rightarrow D.x \rangle \\
\equiv & \{ \text{ separación del término } \} \\
 & \langle \forall x : : \underline{(A.x \Rightarrow \neg D.x) \wedge (R.x \Rightarrow D.x)} \rangle \\
\Rightarrow & \{ \textbf{ Teorema 1: } (p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p), \text{ y Monotonía del } \forall \} \\
 & \langle \forall x : : R.x \Rightarrow \neg A.x \rangle \\
\equiv & \{ \text{ Intercambio rango y término } \} \\
 & \langle \forall x : R.x : \neg A.x \rangle
\end{array}
$$

Demostración del ***Teorema 1:***

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{(p \Rightarrow \neg q)} \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p) \\
\equiv & \{ \text{ Contrarrecíproca } \} \\
 & \underline{(q \Rightarrow \neg p) \wedge (r \Rightarrow q)} \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p) \\
\equiv & \{ \text{ Conmutatividad de } \wedge \} \\
 & (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p) \\
\equiv & \{ \text{ Transitividad de } \Rightarrow \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

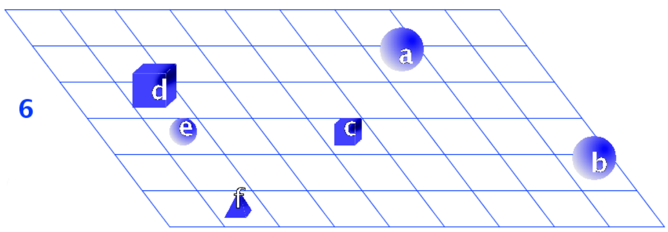
Ahora veamos el caso de un razonamiento no válido, por ejemplo:

P_1 : *Todo cubo está a la izquierda de* a.
P_2 : e *está a la izquierda de* a.
C: *Por lo tanto* e *es un cubo.*

que podemos formalizar como:

$$\langle \forall x : \mathit{cubo}.x : \mathit{izquierda}.x.\mathsf{a} \rangle \wedge \mathit{izquierda}.\mathsf{e}.\mathsf{a} \Rightarrow \mathit{cubo}.\mathsf{e}$$

Para mostrar su invalidez, lo único que hace falta es dar un mundo donde todos los cubos estén a la izquierda del objeto a*, el objeto* e *también esté a la izquierda de* a*, pero siendo* e *otra cosa diferente a un cubo. Un tal mundo es el siguiente:*



Finalmente, analicemos el siguiente razonamiento:

P_1 : *Todo el que ayuda a combatir la pobreza afirma que ésta es inmoral, injusta e ilegítima.*
P_2 : *La Iglesia dice que la pobreza es inmoral, injusta e ilegítima.*
C : *Por lo tanto, la Iglesia ayuda a combatir la pobreza*

Alguien que crea que efectivamente la Iglesia combate la pobreza podría estar tentado de afirmar que el razonamiento es válido. Sin embargo, como dijimos antes, no importa si la conclusión realmente verdadera o no, sino solamente, si la conclusión se puede deducir de la información provista por las hipótesis. Análogamente alguien con la posición contraria podría afirmar que el razonamiento no es válido porque efectivamente la Iglesia NO combate la pobreza. Pero esto sería incurrir en el mismo tipo de error.

Lo que es relevante para este razonamiento es que las hipótesis permiten tanto la situación en que la Iglesia combate la pobreza como la situación contraria. Es **la posibilidad** *de que la Iglesia no combata la pobreza (independientemente de que esto ocurra o no en la realidad) lo que convierte al razonamiento en inválido. Mas formalmente, si utilizamos* $R.x$ *para "*x *combate la pobreza", y* $T.x$ *para "afirma que la pobreza es inmoral, ...", el razonamiento se escribe como:*

$$\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \wedge T.\mathsf{iglesia} \Rightarrow R.\mathsf{iglesia}$$

Claramente puede darse el caso $\neg R.\mathsf{iglesia}$ *que no contradice las hipótesis, pero si la conclusión.*

Como no es posible utilizar el conocimiento del mundo real para deducir la validez o no de un razonamiento, sino sólo la información de las hipótesis, el significado concreto de cada predicado no es relevante. Lo único que interesa en el análisis del razonamiento es la **forma** *del mismo.*

Notemos que este razonamiento tiene la misma **forma** *que el ejemplo anterior, tomando* $R.x = \mathit{cubo}.x$ *y* $T.x = \mathit{izquierda}.x.\mathsf{a}$*. De hecho el contraejemplo anterior nos sirve también en este caso. En general, siempre que el razonamiento sea no válido, es posible "traducir" el razonamiento a otro dominio como el de las figuras geométricas de* `ithaca`*, donde sea mas fácil dar un contraejemplo.*

Los siguientes ejercicios tratan sobre el análisis de razonamientos utilizando el Cálculo de Predicados.

16. Demostrá que los siguientes razonamientos son válidos:

    a) Algún cubo es azul, por lo tanto algo azul es un cubo.

    b) Ningún cubo es grande, por lo tanto nada grande es un cubo.

    c) Si algunas pirámides no están a la izquierda de `a`, entonces existe alguna pirámide.

    d) No existe ningún cubo blanco, por lo tanto todo cubo blanco tiene pintitas rosas.

    e) Todos las esferas son grandes y rojas. Existen esferas con pintitas rosas. Luego, existe algo grande que tiene pintitas rosas.

    f) No existe ningún unicornio, por lo tanto todo unicornio tiene dos cuernos.

    g) Todos los directivos del FMI son corruptos y mentirosos. Existen directivos del FMI inútiles. Luego, existen corruptos inútiles.

    ¿Encontrás alguna relación entre los razonamientos d y f? ¿y entre e y g?

17. Demostrá la propiedad $\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : R.x \wedge Q.x : T.x \wedge Q.x \rangle$. Luego,

    a) demostrá que el siguiente razonamiento es válido:

    Todo elefante es un animal, luego todo elefante gris es un animal gris

b) ¿por qué no es válido el siguiente razonamiento, aparentemente igual al anterior?:

Todo elefante es un animal, luego todo elefante pequeño es un animal pequeño

18. Formalizá y analizá los siguientes razonamientos, y decidí si son válidos o no. Justificá a través de una demostración o contraejemplo.

a) Todo cubo es azul. `a` no es un cubo. Luego `a` no es azul.

b) Todos los artistas son ególatras, algunos artistas son indigentes, luego algunos indigentes son ególatras.

c) Todos los anarquistas son partidarios de la fuerza y la violencia, todos los militaristas son partidarios de la fuerza y la violencia, luego todos los militaristas son anarquistas.

d) Ningún ateo tiene fe en el Señor, pero todos los que tienen fe en el Señor son hombres sabios, por lo tanto, ningún ateo es un hombre sabio.

e) Todo hombre es mamífero, algunos animales no son mamíferos, por lo tanto algunos animales no son hombres.

f) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, algunos pájaros no son hombres.

g) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, ningún pájaro es hombre.

h) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son mamíferos. Por lo tanto, ningún mamífero es hombre.

i) Algunos hombres no son corruptos. Todos los políticos son corruptos. Por lo tanto, algunos hombres no son políticos.

j) Todo aquel que tome cianuro, se morirá. La abuela no ha tomado cianuro, luego no morirá.

Ejercicios extra

A continuación incluímos más ejercicios del Cálculo de Predicados. Te recomendamos que resuelvas tantos ejercicios como te sea posible.

19. Formalizá las siguientes sentencias escritas en lenguaje natural, utilizando cuantificadores y predicados arbitrarios para aquellas propiedades elementales.

a) Todo número menor que cien es menor que 2^7.

b) Sólo los empleados pueden usar los ascensores de servicio.

c) Los empleados pueden usar sólamente los ascensores de servicio.
¿Las dos sentencias anteriores dicen lo mismo?

d) Todo número menor que cien está entre dos potencias de 2.

e) Todo entero que es suma de dos cuadrados es positivo.

f) Si un entero divide a un segundo entero, y éste divide a un tercero, entonces existe un entero que, multiplicado por el primer número, da como resultado el tercero.

g) Un entero es primo si y solo si, siempre que divida a un producto de enteros, divide a al menos uno de ellos.

h) Un entero x es primo si y solo si para todo entero n, existen enteros a, b tales que $a * x + b * n = 1$.

i) El último elemento de xs es 10.

j) El primer elemento de xs es el último.

k) Si xs es creciente, entonces el primer elemento es el menor.

l) Todos los elementos de la lista son distintos.

m) Hay un elemento de la lista xs que es mayor estricto a todos los otros.

n) n es el menor entero tal que $xs.n$ es par.

ñ) El primer elemento de xs es el máximo.

o) xs incluye todos los ceros de la función f.

p) xs e ys tienen un segmento no vacío en común.

q) zs es el mayor segmento común entre xs e ys.

20. Dada xs una lista de naturales, los siguientes gráficos describen ciertas propiedades sobre xs. Escribí para cada uno, una fórmula que especifique cada propiedad.

a)

0	k	$\#xs$
$\geq x$	$= x$	

b)

0	k $\#xs$
creciente	

c)

0	k $\#xs$
$> x$	$\leq x$

21. Definí funciones por recursión y/o composición para cada una de las siguientes descripciones. Luego programalas en `haskell`.

a) *paratodo'* : $[A] \to (A \to Bool) \to (A \to Bool) \to Bool$, que dada una lista xs de elementos de tipo A y predicados R y T, determina si vale $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs \wedge R.i : T.(xs.i) \rangle$.

b) *existe'* : $[A] \to (A \to Bool) \to (A \to Bool) \to Bool$, que dada una lista xs de elementos de tipo A y predicados R y T, determina si vale $\langle \exists i : 0 \leq i < \#xs \wedge R.i : T.(xs.i) \rangle$.

22. Demostrá los siguientes teoremas:

a) $\langle \forall x, y, z : R.x.y \wedge R.y.z : R.x.z \rangle \wedge \langle \forall x : : \neg R.x.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x, y : R.x.y : \neg R.y.x \rangle)$

b) $\langle \exists x : : P.x \rangle \wedge \langle \forall x : P.x : P.(f.x) \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : P.(f.(f.x)) \rangle$

c) $\langle \forall x : : P.x.(f.x) \vee P.(f.x).x \rangle \wedge \langle \forall x, y : P.x.y : P.(f.x).(f.y) \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : \langle \exists y : : P.(f.x).y \rangle \rangle$

d) $\langle \forall x : : \langle \exists y : : P.x.y \Rightarrow Q.x \rangle \rangle \wedge \langle \forall x, y : : P.x.y \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : Q.x \rangle$