Introducción a los Algoritmos - 2do. cuatrimestre 2015

Guía 1: Semántica de Lógica Proposicional

Docentes: Araceli Acosta, Walter Alini, Luciana Benotti, Alejandro Gadea

La lógica proposicional puede usarse como una formalización elemental del razonamiento deductivo. El objetivo general de esta guía es introducirnos a la lógica proposicional, como herramienta para describir problemas y razonar sobre los mismos.

Especificaciones con Expresiones Proposicionales

1. Representá con una fórmula de lógica proposicional los siguientes enunciados. Usá el símbolo de predicado p para representar $(a < b)$, q para representar $(b < c)$, y r para $(a < c)$.

    a) $a < b < c$
    b) Si $a < b$ entonces no es el caso que $(a \geq c)$
    c) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $(a \geq c)$
    d) No es el caso que $(a < b$ y $a < c)$
    e) (No es el caso que $(a < b$ y $(a < c$ ó $b < c)))$ ó $(a \geq b$ y $a < c)$

2. Escribí una fórmula proposicional para cada una de las siguientes frases, utilizando una variable proposicional para cada sentencia atómica, aclarando siempre el significado escogido para cada variable. A veces es conveniente reescribir las frases para hacer más claro su sentido. Por ejemplo, la frase

    Hoy es martes o jueves

    puede pensarse como dos oraciones unidas por una disyunción, pudiendo reescribirse como:

    Hoy es martes **u hoy es** jueves

    Entonces podemos formalizarla con la fórmula $p \vee q$, utilizando p para la primer sentencia y q para la segunda, es decir, definiendo:

    $$p \doteq \text{hoy es martes}$$
    $$q \doteq \text{hoy es jueves}$$

    En lo posible utilizá un mismo símbolo de proposición para la misma sentencia atómica a lo largo de todo el ejercicio, para poder comparar las fórmulas.

    a) Hoy es martes y hay sol.
    b) Hoy es martes y no hay sol.
    c) Hoy no es ni miércoles ni viernes.
    d) Mañana, lloverá o no lloverá.
    e) Mañana será jueves y no será jueves.
    f) Hoy es lunes, pero tengo clases de Introducción a los Algoritmos.
    g) Si hace frío y llueve, puedo concluir que hace frío.
    h) Yo no voy de vacaciones y Juan y Pedro tampoco.
    i) Juan vendrá a clase, y seguro que vendrán también María o Pedro.
    j) Si no me gusta la sopa ni la ensalada, no me conviene pedir el menú completo.
    k) No es verdad que si tienes menos de 16 años y consentimiento paterno te puedas casar.

Validez y satisfactibilidad

Dos cualidades asociadas a la semántica de una fórmula, es decir, a la interpretación o significado que le damos, son los conceptos de ***satisfactibilidad*** *y* ***validez****. Estas propiedades ganan relevancia cuando se trata de fórmulas con variables. Decimos que una fórmula es* ***satisfactible*** *cuando es verdadera para algunos valores posibles de las variables. Decimos que es* ***válida*** *cuando es verdadera para todos los valores posibles de las variables.*

Nuestro principal interés es distinguir cuándo una fórmula es válida y cuándo no. Como la validez es independiente de los valores de las variables involucradas, si queremos demostrar la validez de una fórmula no podemos hacer ninguna suposición sobre los valores de las variables. Por el contrario, cuando queremos demostrar que una fórmula es ***no valida*** *es suficiente con encontrar al menos un valor que haga que la fórmula sea falsa: esto es un contraejemplo. Algunas veces además es posible demostrar directamente que la fórmula es falsa para todos los valores de las variables. En este caso decimos que la fórmula es* ***no satisfactible****, porque no existe ningún valor posible que haga que sea verdadera.*

Importante: Cuando una fórmula es siempre verdadera la llamamos **válida**, cuando es verdadera para algunos valores la llamamos **satisfactible**, cuando es falsa para algunos valores la llamamos **no válida** y cuando es falsa para todos los valores la llamamos **no satisfactible**.

3. De las fórmulas que escribiste en el ejercicio anterior analizá cuándo son verdaderas y cuándo falsas. Luego, decidí si son válidas o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una tabla de verdad, un ejemplo o un contraejemplo, según corresponda.

4. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una tabla de verdad, un ejemplo o un contraejemplo, según corresponda.

   a) p
   b) $p \equiv p$
   c) $p \equiv p \equiv p$
   d) $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$
   e) $p \vee q \Rightarrow p$
   f) $p \wedge q \Rightarrow p$
   g) $p \Rightarrow q \wedge p$
   h) $p \Rightarrow q \vee p$
   i) $p \Rightarrow q$
   j) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
   k) $p \equiv p \equiv \mathit{True}$
   l) $\mathit{True} \vee p$
   m) $\mathit{True} \wedge p$
   n) $\mathit{False} \vee p$
   ñ) $\mathit{False} \wedge p$

5. Da ejemplos y una justificación apropiada de una fórmula:

   a) válida (y por lo tanto satisfactible).
   b) satisfactible pero no válida.
   c) no satisfactible (y por lo tanto no válida).

Precedencia y tipado con operaciones booleanas

La lógica proposicional amplía el lenguaje que venimos manejando, introduciendo dos constantes que representan los valores de verdad (True y False) y diversos operadores booleanos sobre estos valores ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\equiv$, $\Rightarrow$). Esta lógica nos permite escribir expresiones que codifican propiedades mas interesantes, como por ejemplo que "si un número a es mayor a b y, además, b es mayor a c, entonces a tiene que ser mayor a c"*:*

$$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$$

*Al complejizarse el lenguaje, es necesario establecer reglas de notación para poder escribir las expresiones con mayor claridad y sin ambigüedades. En particular, es posible eliminar paréntesis cuando los operadores involucrados son asociativos (*i.e. *no importa el orden en que asocien los operandos), y según las reglas de precedencia, tal como hemos visto hasta ahora.*

Los operadores $\wedge$, $\vee$, $\equiv$, $\not\equiv$ ***son asociativos****. Esto nos permite establecer por ejemplo que las expresiones $p \wedge q \wedge r$, junto con $p \wedge (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ son equivalentes.*

A la derecha se listan los nuevos operadores y aquellos vistos anteriormente, en orden de mayor a menor precedencia.

En los siguientes ejercicios comenzamos trabajando principalmente con los aspectos ***sintácticos*** *del nuevo lenguaje, para asegurar una buena capacidad de lectura y escritura de las nuevas expresiones, y con la* ***semántica*** *de los nuevos operadores, es decir, su significado.*

Niveles de Precedencia

1	$\sqrt{\ }, (\cdot)^2$	raíces y potencias
2	$*, /$	producto y división
3	max , min	máximo y mínimo
4	$+, -$	suma y resta
5	$=, \leqslant, \geqslant$	operadores de comparación
6	$\neg$	negación
7	$\vee\ \wedge$	disyunción y conjunción
8	$\Rightarrow\ \Leftarrow$	implicación y consecuencia
9	$\equiv\ \not\equiv$	equivalencia y discrepancia

1. Sacá todos los paréntesis que sean *superfluos* según las reglas de precedencia de los operadores booleanos.

   a) $((((a = b) \wedge (b = c)) \Rightarrow (a = c)) \equiv \mathit{True})$

   b) $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \equiv q))$

   c) $(((p \wedge q) \vee (\neg r)) \Rightarrow (p \wedge (q \vee r)))$

2. Introducí paréntesis para hacer *explícita* la precedencia.

   a) $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

   b) $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$

   c) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

3. ¿Están bien escritas las siguientes expresiones? Para evitar errores, introducí paréntesis de acuerdo a las reglas de precedencia, y en caso de ser posible escribí una tabla declarando el tipo de cada variable.

   a) $((\mathit{True} \wedge \mathit{False}) \Rightarrow \mathit{False}) \equiv \mathit{False}$

   b) $2 = 3 \vee 3 = 4 \vee a * a + 2 \leqslant b + 7$

   c) $(x \wedge y \equiv a) \wedge z \leqslant w$

   d) $x + 3 \Rightarrow y$

   e) $(x + 3 = y) \wedge \neg z$

   f) $a \vee b = 3 + y$

   g) $a \geqslant b \wedge 3 + 2 < 4 \ \Rightarrow \ c \equiv b + 1 = 2$

   h) $a + 2 \geqslant c \Rightarrow 3 + 2 < b \ \equiv \ c \equiv b = 2 * a$

   i) $\neg a * b + c = d \vee p \Rightarrow q \equiv r \Leftarrow s \wedge j = k + l * m$