Introducción a los Algoritmos - 2do. cuatrimestre 2011

Guía 2: Listas, funciones, inducción y recursión

Docentes: Araceli Acosta, Walter Alini, Luciana Benotti, Ezequiel Orbe

En esta guía comenzaremos a trabajar con un lenguaje más complejo que la aritmética. Para familiarizarnos con este lenguaje los primeros ejercicios son de evaluación y tipado. Los siguientes serán sobre definición de funciones recursivas y no recursivas, listas por comprensión y, finalmente, inducción.

Listas

A partir de esta sección extendemos el lenguaje de nuestras fórmulas con el tipo de las listas, denotado como $List$. *Una lista (o secuencia) es una colección ordenada de valores, que deben ser todos del mismo tipo. Denotamos lista vacía con* $[\,]$. *El operador* $\triangleright$ *(llamado "pegar") es fundamental (se lo denomina constructor) ya que permite construir listas arbitrarias a partir de la lista vacía.* $\triangleright$ *toma un elemento* x *(a izquierda) y una lista* xs *y devuelve una lista con primer elemento* x *seguido de los elementos de* xs. *Por ejemplo* $3\triangleright[\,] = [3]$, *y* $1\triangleright[2,3] = [1,2,3]$. *Para denotar listas no vacías utilizamos expresiones de la forma* $[x, y, \ldots, z]$, *que son abreviaciones de* $x \triangleright (y \triangleright \ldots \triangleright (z \triangleright [\,]))$. *Como el operador* $\triangleright$ *es asociativo a derecha, es lo mismo escribir* $x \triangleright (y \triangleright \ldots \triangleright (z \triangleright [\,]))$ *que* $x \triangleright y \triangleright \ldots \triangleright z \triangleright [\,]$. *Otros operadores sobre listas son los siguientes:*

- $\triangleleft$ *toma una lista* xs *(a izquierda) y un elemento y devuelve una lista con todos los elemento de* xs *seguidos por* x *como último elemento. Ej:* $[1,2] \triangleleft 3 = [1,2,3]$. *Este operador, llamado "pegar a izquierda", es asociativo a izquierda, luego es lo mismo* $([\,] \triangleleft z) \ldots \triangleleft y) \triangleleft x$ *que* $[\,] \triangleleft z \ldots \triangleleft y \triangleleft x$.

- $\#$, *llamado cardinal, toma una lista* xs *y devuelve su cantidad de elementos. Ej:* $\#.[1,2,0,5] = 4$

- $.$ *toma una lista* xs *(a izquierda) y un natural* n *que indica una posición, y devuelve el elemento de la lista que se encuentra en la posición* n *(contando a partir de la posición* 0*). Ej:* $[1,3,3,6,2,3,4,5].4 = 2$. *Este operador, llamado índice, asocia a izquierda, por lo tanto* $xs.n.m$ *se interpreta como* $(xs.n).m$.

- $\uparrow$ *toma una lista* xs *(a izquierda) y un natural* n *que indica una cantidad, y devuelve la sublista con los primeros* n *elementos de* xs. *Ej:* $[1,2,3,4,5,6] \uparrow 2 = [1,2]$. *Este operador, llamado tomar, asocia a izquierda, por lo tanto* $xs \uparrow n \uparrow m$ *se interpreta como* $(xs \uparrow n) \uparrow m$.

- $\downarrow$ *toma una lista* xs *(a izquierda) y un natural* n *que indica una cantidad, y devuelve la sublista sin los primeros* n *elementos de* xs. *Ej:* $[1,2,3,4,5,6] \downarrow 2 = [3,4,5,6]$. *Este operador, llamado tirar, se comporta igual al anterior, interpretando* $xs \downarrow n \downarrow m$ *como* $(xs \downarrow n) \downarrow m$.

- $+\!\!+$ *toma una lista* xs *(a izquierda) y otra* ys, *y devuelve la lista con todos los elementos de* xs *seguidos de los elementos de* ys. *Ej:* $[1,2,4] +\!\!+ [1,0,7] = [1,2,4,1,0,7]$. *Este operador, llamado concatenación, es asociativo por lo que podemos escribir sin ambigüedad expresiones sin paréntesis, como* $xs +\!\!+ ys +\!\!+ zs$.

Existen además dos funciones fundamentales sobre listas que listamos a continuación. Notar que como son funciones se hace explícita la aplicación de función con el símbolo (.).

- *head, llamada cabeza, toma una lista* xs *y devuelve su primer elemento. Ej:* $head.[1,2,3] = 1$

- *tail, llamada cola, toma una lista* xs *y devuelve la sublista que resulta de eliminar el primer elemento. Ej:* $tail.[1,2,3] = [2,3]$

La aplicación de función asocia a izquierda, por lo tanto en general es necesario utilizar paréntesis para que la expresión quede bien tipada. Si se quiere escribir la expresión $tail.(tail.xs)$ *no se pueden eliminar los paréntesis, puesto que* $tail.tail.xs$ *(que se interpreta como* $(tail.tail).xs$ *no tiene sentido.*

A continuación, listamos los niveles de precedencia de estos operadores. Los que están más arriba tienen mayor precedencia. Cuando hay más de un operador en un nivel de precedencia, es necesario poner paréntesis para evitar la ambigüedad. Por ejemplo $x \triangleright xs \uparrow n$ *se interpreta como* $x \triangleright (xs \uparrow n)$.

., #, *head* y *tail*	*aplicación de función e índice, cardinal, head y tail*
$\uparrow, \downarrow$	*tomar y tirar elementos de una lista*
$\triangleright, \triangleleft$	*pegar a derecha y pegar a izquierda*
$+\!\!+$	*concatenar dos listas*

Te recomendamos leer las secciones 7.2, 7.4, 7.5, 7.6, 7.8, 7.10, del libro para profundizar en estos conceptos.

El objetivo de los siguientes ejercicios es familiarizarse con el tipo de listas y extender el método para justificar el tipado de expresiones, considerando expresiones más complejas que las que veníamos trabajando.

1. Utilizá las definiciones intuitivas de los operadores de listas para evaluar las siguientes expresiones. Subrayá la subexpresión resuelta en cada paso justificado. Luego usá un intérprete de `haskell` para verificar los resultados. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{ll}
 & [23,45,6].\underline{(head.[1,2,3,10,34])} \\
= & \{ \text{ def. de } head \text{ } \} \\
 & \underline{[23,45,6].1} \\
= & \{ \text{ def. de . } \} \\
 & 45
\end{array}
$$

   a) $\#[5,6,7]$

   b) $[5,3,57].1$

   c) $[0,11,2,5] \triangleright [\ ]$

   d) $[5,6,7] \uparrow 2$

   e) $[5,6,7] \downarrow 2$

   f) $head.(0 \triangleright [1,2,3])$.

En `haskell` los distintos operadores se pueden escribir así:

$head.xs$	`head xs`
$tail.xs$	`tail xs`
$x \triangleright xs$	`x:xs`
$xs \triangleleft x$	`xs ++ [x]`
$xs \uparrow n$	`take n xs`
$xs \downarrow n$	`drop n xs`
$xs +\!\!+ ys$	`xs ++ ys`
$\#xs$	`length xs`
$xs.n$	`xs !! n`

2. Teniendo en cuenta la definición intuitiva de los operadores de listas de la introducción a esta sección, escribí las reglas de tipado de cada uno de ellos. Por ejemplo, el operador *head* toma una lista y devuelve el primer elemento de ella. La lista puede contener elementos de cualquier tipo (todos del mismo), ya sean números, valores booleanos, otras listas, etc. Para denotar esta situación utilizamos variables (en mayúsculas). Entonces podemos decir que el operador *head* toma una lista de tipo $[A]$, donde la variable A representa cualquier tipo ($Num, Bool, [Num], \ldots$) y devuelve un elemento de esa lista, por lo tanto debe ser un elemento de tipo A. Esto lo escribimos en *notación funcional* (izq.) o en *notación de árbol* (der.):

$$head : [A] \to A \qquad\qquad \frac{head.[A]}{A}$$

3. Decidí si las siguientes expresiones están bien escritas, agregando paréntesis para hacer explícita la precedencia y la asociatividad, y justificando con el árbol del tipado correspondiente. Usá un intérprete de `haskell` para verificar los resultados.

   a) $-45 \triangleright [1,2,3]$.

   b) $([1,2] +\!\!+ [3,4]) \triangleleft 5$.

   c) $0 \triangleleft [1,2,3]$.

   d) $[\ ] \triangleright [\ ]$

   e) $([1] +\!\!+ [2]) \triangleleft [3]$.

   f) $[1,5,False]$.

   g) $head.[[5]]$.

   h) $head.[True, False] +\!\!+ [False]$.

4. Decidí si es posible asignar tipos a las variables $x, y, z, \ldots$ de forma que las expresiones queden bien tipadas. Justificá con un árbol de tipado y una tabla de tipos de las variables.

   a) $x \triangleright y \triangleright z$.

   b) $x \triangleright (y \triangleleft z)$.

   c) $(x \triangleright y) \triangleright z$.

   d) $(x +\!\!+ y) \triangleright (z +\!\!+ w)$.

   e) $head.xs.n = head.(xs.n)$.

   f) $x \triangleright [x]$.

   g) $x \triangleright [[x]]$.

   h) $x \triangleright [[True]] \triangleright y$.

   i) $xs \uparrow ys.4$.

   j) $xs \uparrow [1,2].0$.

   k) $xs \downarrow xs.2$.

Funciones no recursivas y recursivas simples

El objetivo de los siguientes ejercicios es introducirnos en la ***programación funcional****, es decir, al desarrollo de programas como funciones, generalmente recursivas.*

Una ***función recursiva*** *es una función tal que en su definición puede aparecer su propio nombre. Una buena pregunta sería ¿Cómo lograr que no sea una definición circular? La clave está en el principio de inducción: en primer lugar hay que definir la función para el (los) caso(s) más "pequeño(s)", que llamaremos* ***caso base*** *y luego definir el caso general en términos de algo más "chico", que llamaremos* ***caso inductivo*** *. El caso base no debe aparecer el nombre de la función que se está definiendo. El caso inductivo es donde aparece el nombre de la función que se está definiendo, y debe garantizarse que el (los) argumento(s) al cual se aplica en la definición es más "chico" (para alguna definición de más chico) que el valor para la que se está definiendo.*

En el siguiente ejercicio se pretende introducir el uso de tuplas y definiciones por casos para definir funciones. Luego se trabajará con funciones recursivas.

5. Definí las funciones simples que describimos a continuación, luego implementálas en `haskell` . Por ejemplo:

   Enunciado: *signo* : *Int* $\rightarrow$ *Int*, que dado un entero retorna su signo, de la siguiente forma: retorna 1 si x es positivo, -1 si es negativo y 0 en cualquier otro caso.

   Solución:

   $$\begin{array}{l} sgn : Num \rightarrow Num \\ sgn.x \doteq (\ 0 < x \rightarrow\ 1 \\ \qquad\quad \square\, x < 0 \rightarrow -1 \\ \qquad\quad \square\, x = 0 \rightarrow\ 0 \\ \qquad\quad) \end{array}$$

   ```
   sgn :: Int -> Int
   sgn x | 0<x   = 1
         | x<0   = -1
         | x==0  = 0
   ```

   En `haskell` los conectivos para las condiciones se pueden escribir así:

$\wedge$	`&&`
$\vee$	`||`
$\neg$	`not`

   a) *entre0y9* : *Int* $\rightarrow$ *Bool*, que dado un entero devuelve *True* si el entero se encuentra entre 0 y 9.

   b) *segundo3* : $(Int, Int, Int) \rightarrow Int$, que dada una terna de enteros devuelve su segundo elemento.

   c) *ordena* : $(Int, Int) \rightarrow (Int, Int)$, que dados dos enteros los ordena de menor a mayor.

   d) *rangoPrecio* : *Int* $\rightarrow$ *String*, que dado un número que representa el precio de una computadora, retorne "muy barato" si el precio es menor a 2000, "demasiado caro" si el precio es mayor que 5000, "hay que verlo bien" si el precio está entre 2000 y 5000, y "esto no puede ser!" si el precio es negativo.

   e) *absoluto* : *Int* $\rightarrow$ *Int*, que dado un entero retorne su valor absoluto.

   f) *esMultiplo2* : *Int* $\rightarrow$ *Bool*, que dado un entero n devuelve *True* si n es múltiplo de 2.
   Ayuda: usar `mod`, el operador que devuelve el resto de la división.

   g) *rangoPrecioParametrizado* : $Int \rightarrow (Int, Int) \rightarrow String$ que dado un número x, que representa el precio de un producto, y un par $(menor, mayor)$ que represente el rango de precios que uno espera encontrar, retorne "muy barato" si x está por debajo del rango, "demasiado caro" si está por arriba del rango, "hay que verlo bien" si el precio está en el rango, y "esto no puede ser!" si x es negativo.

   h) *mayor3* : $(Int, Int, Int) \rightarrow (Bool, Bool, Bool)$, que dada una una terna de enteros devuelve una terna de valores booleanos que indica si cada uno de los enteros es mayor que 3.

   Por ejemplo: $mayor3.(1, 4, 3) = (False, True, False)$; $mayor3.(5, 1984, 6) = (True, True, True)$

6. Una función de **filter** es aquella que dada una lista devuelve otra lista cuyos elementos son los elementos de la primera que cumplan una determinada condición, en el mismo orden y con las mismas repeticiones (si las hubiere). Por ejemplo: $soloPares : [Int] \rightarrow [Int]$ devuelve aquellos elementos de la lista que son pares.

   Definí recursivamente las siguientes funciones filter.

   a) *soloPares* : $[Int] \rightarrow [Int]$, que dada una lista de enteros xs devuelve una lista sólo con los números pares contenidos en xs, en el mismo orden y con las mismas repeticiones (si las hubiera).

   Por ejemplo: $soloPares.[3, 0, -2, 12] = [0, -2]$

b) *mayoresQue10* : $[Int] \rightarrow [Int]$, que dada una lista de enteros xs devuelve una lista sólo con los números mayores que 10 contenidos en xs,

Por ejemplo: *mayoresQue10*.$[3, 0, -2, 12] = [12]$

c) *mayoresQue* : $Int \rightarrow [Int] \rightarrow [Int]$, que dado un entero n y una lista de enteros xs devuelve una lista sólo con los números mayores que n contenidos en xs,

Por ejemplo: *mayoresQue*.$2.[3, 0, -2, 12] = [3, 12]$

Preguntas:

a) ¿Se te ocurre algún otro ejemplo de una función de este tipo?

b) ¿Cómo describirías una regla general para este tipo de funciones? **Ayuda:** Considerá que la condición que se testea se representa con el predicado p. También considerá los primeros dos casos y luego generalizá para el último.

7. Una función de **map** es aquella que dada una lista devuelve otra lista cuyos elementos son los que se obtienen de aplicar una función a cada elemento de la primera en el mismo orden y con las mismas repeticiones (si las hubiere). Por ejemplo: *duplica* : $[Int] \rightarrow [Int]$ devuelve cada elemento de la lista multiplicado por 2.

Definí recursivamente las siguientes funciones de map.

a) *duplica* : $[Int] \rightarrow [Int]$, que dada una lista de enteros duplica cada uno de sus elementos.

Por ejemplo: *duplica*.$[3, 0, -2] = [6, 0, -4]$

b) *multiplica* : $Int \rightarrow [Int] \rightarrow [Int]$, que dado un número n y una lista, multiplica cada uno de los elementos por n.

Por ejemplo: *multiplica*.$3.[3, 0, -2] = [9, 0, -6]$

Preguntas:

a) ¿Se te ocurre algún otro ejemplo de una función de este tipo?

b) ¿Cómo describirías una regla general para este tipo de funciones? **Ayuda:** considerá que la función a aplicar a cada elemento se llama f.

8. Otros tipos de funciones pueden ser **existenciales**, que dada una lista devuelve *True* si existe algún elemento en la lista que cumpla que determinada condición y *False* en caso contrario, y **universales** que dada una lista devuelve *True* si todos los elementos en la lista cumplen con determinada condición y *False* en caso contrario.

Definí recursivamente las siguientes funciones universales y existenciales.

a) *todosMenores10* : $[Int] \rightarrow Bool$, que dada una lista devuelve *True* si ésta consiste sólo de números menores que 10.

b) *hay0* : $[Int] \rightarrow Bool$, que dada una lista decide si existe algún 0 en ella.

Preguntas:

a) ¿Se te ocurre algún otro ejemplo de una función de tipo existencial?

b) ¿Cómo describirías una regla general para este tipo de funciones? **Ayuda:** considerá que la condición que se testea se representa con el predicado p.

c) ¿Se te ocurre algún otro ejemplo de una función de tipo universal?

d) ¿Cómo describirías una regla general para este tipo de funciones? **Ayuda:** considerá que la condición que se testea se representa con el predicado p.

Listas por comprensión

Existe un mecanismo poderoso para definir listas, similar a la definición de conjuntos por comprensión. Veamos los siguientes ejemplos:

$$[0,2,4,6] = [2*x \mid x \leftarrow [0,1,2,3]\,]$$
$$[4,16,36,64,100] = [x*x \mid x \leftarrow [1..10], x\ par]$$
$$[(1,1),(1,2),(1,3)] = [(a,b) \mid a \leftarrow [1], b \leftarrow [1,2,3]\,]$$

El símbolo $x \leftarrow [0,1,2,3]$ se lee "x viene de la lista [0,1,2,3]" y se lo denomina **generador**. *Como se puede ver en los ejemplos, una definición por comprensión es de la forma $[e \mid Q]$; donde* **e** *determina la forma de los valores que se incluirán en la lista, y* **Q** *es una secuencia de generadores y/o predicados que determina a partir de qué valores se formarán esos elementos. Un generador indica de qué lista se toman los elementos y un predicado determina qué elementos de la lista considerada son elegidos. Siempre debe haber al menos un generador.*

Algunas abreviaciones de listas muy útiles para utilizar para definir listas por comprension son $[n..m]$ y $[n..]$, donde n, m son números enteros. La primera representa la lista de todos los números entre n y m, y la segunda la lista de todos los números mas grandes que n. Existen otras abreviaciones que son interesantes, jugá con `haskell` *para descubrir cómo funcionan. Por ejemplo, ¿que lista está representada por $[2,4..]$?*

Las ventajas de notación por comprensión son dos: es fácil de leer y su escritura es muy parecida a la de teoría de conjuntos. Una desventaja es que es más difícil manipular listas por comprensión que listas definidas usando los operadores introducidos anteriormente. Sin embargo las listas por comprensión resultan muy útiles para resolver algunos problemas, como veremos a continuación.

9. Describí con tus palabras qué características tienen los elementos de las siguientes listas definidas por comprensión. Luego escribilas en `haskell` y verificá tus respuestas.

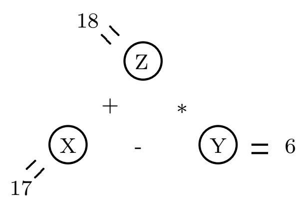
   a) $[x \mid x \leftarrow [1, 2\,..],\ par.x]$
   b) $[(x,y,z) \mid x \leftarrow [0..100], y \leftarrow [0..100], z \leftarrow [0..100], x^2 + y^2 = z^2]$
   c) $[(x, x*x) \mid x \leftarrow [1, 2\,..]\,]$
   d) $[(x,y) \mid x \leftarrow ['Juan','Pablo','Eugenia','Sofia','Ana','Laura'], y \leftarrow ['Julian','Eva']]$
   e) $[xs \mid y \leftarrow ['Juan','Pablo','Eugenia','Sofia','Ana','Laura'],$
   $xs \leftarrow [(x,y) \mid x \leftarrow ['Juan','Pablo','Eugenia','Sofia','Ana','Laura'], x \neq y]\,]$

10. Definir las siguientes funciones mediante listas por comprensión

   a) $duplica : [Int] \to [Int]$, que dada una lista de enteros multiplica por 2 cada cada uno de sus elementos.
   Por ejemplo $duplica.[2,5,12] = [4,10,24]$
   b) $divisores : Int \to [Int]$, que dado un número natural n genera una lista con todos sus divisores.
   Por ejemplo: $divisores.6 = [1,2,3,6]$
   c) ☺ $primos : Int \to [Int]$, que dado un número natural n genera una lista con todos los primos menores que n.
   Por ejemplo: $primos.10 = [1,2,3,5,7]$

11. *a*) ¿Cuál es la cantidad de elementos que tiene la siguiente lista?
   $[(x,y) \mid x \leftarrow [1..4], y \leftarrow [3..8]\,]$
   b) Calculá la cardinalidad de $[\,expr \mid x \leftarrow xs, y \leftarrow ys\,]$ en términos de $\#xs$ y $\#ys$.

12. ☺ Dado el siguiente puzzle de números, encontrá todas ternas de valores que son soluciones, sabiendo que $0 \leqslant x, y, z \leqslant 32$.



Funciones más complejas

En las funciones vistas hasta el momento hemos trabajados con tipos específicos de funciones sobre listas. A continuación trabajaremos con funciones recursivas en términos generales. También analizaremos el tipo de las funciones.

13. Definí recursivamente los operadores básicos de listas: $\#$, $.$, $\triangleleft$, $\uparrow$, $\downarrow$, $+\!\!+$. Para los operadores $\uparrow$, $\downarrow$ y $.$ deberás hacer recursión en ambos parámetros, en el parámetro lista y en el parámetro numérico.

14. (i) Definí funciones por recursión para cada una de las siguientes descripciones. (ii) En los casos en que la función devuelva una lista, también definila por comprensión. (iii) Identificá si las funciones son de algún tipo ya conocido (filter, map, existencial, universal). (iv) Programálas en `haskell` y verificá los resultados obtenidos.

    a) $maximo : [Int] \to Int$, que calcula el máximo elemento de una lista de enteros.

    Por ejemplo: $maximo.[2, 5, 1, 7, 3] = 7$

    Ayuda: Ir tomando de a dos elementos de la lista y 'guardar' el mayor.

    b) $esMultiploLista : Int \to [Int] \to [Bool]$, que dado un entero n y una lista de enteros xs devuelve una lista de booleanos que indica si n es múltiplo de cada uno de los elementos de xs.

    Por ejemplo: $esMultiploLista.6.[2, 3, 5] = [True, True, False]$

    c) $sum : [Num] \to Num$, que toma una lista de números y devuelve la suma de ellos.

    Por ejemplo: $sum.[1, 2, 3] = 6$

    d) $prod : [Num] \to Num$, que toma una lista de números y devuelve el producto de ellos.

    Por ejemplo: $prod.[1, 2, 3, 4] = 24$

    e) $sumaPares : [(Num, Num)] \to Num$, que dada una lista de pares de números, devuelve la sumatoria de todos los números de todos los pares.

    Por ejemplo: $sumaPares.[(1, 2)(7, 8)(11, 0)] = 29$

    f) $todos0y1 : [Int] \to Bool$, que dada una lista devuelve $True$ si ésta consiste sólo de 0s y 1s.

    Por ejemplo: $todos0y1.[1, 0, 1, 2, 0, 1] = False$, $todos0y1.[1, 0, 1, 0, 0, 1] = True$

    Por ejemplo: $todosMenores10.[2, -3, -5, 4, , -11] = True$, $todosMenores10.[2, -4, 3, 11] = False$

    Por ejemplo: $hay0.[1, 2] = False$, $hay0.[1, 4, 0, 5] = True$.

    g) $quitar0s : [Int] \to [Int]$ que dada una lista de enteros devuelve una la lista pero quitando todos los ceros.

    Por ejemplo $quitar0s.[2, 0, 3, 4] = [2, 3, 4]$

    h) $ultimo : [A] \to A$, que devuelve el último elemento de una lista.

    Por ejemplo: $ultimo.[10, 5, 3, 1] = 1$

    i) $pares : [A] \to [A] \to [(A, A)]$, que toma dos listas y devuelve una lista de pares, tal que el n-ésimo elemento es el par de los n-ésimos elementos de cada una de las listas.

    Por ejemplo: $pares.[0, 1, 2, 3, 4].[10, 20, 30] = [(0, 10), (1, 20), (2, 30)]$

    j) $listasIguales : [A] \to [A] \to Bool$, que determina si dos listas son iguales, es decir, contienen los mismos elementos en las mismas posiciones respectivamente.

    Por ejemplo: $listasIguales.[1, 2, 3].[1, 2, 3] = True$, $listasIguales.[1, 2, 3, 4].[1, 3, 2, 4] = False$

15. Hay funciones que no se pueden definir recursivamente, por lo menos de una manera obvia, y se definen usualmente en términos de otras funciones. Por ejemplo *promedio*.

    a) Definí la función promedio en término de funciones ya vistas: $promedio : [Num] \to Num$, calcula el valor promedio de los valores de una lista de números reales.

    Por ejemplo: $promedio.[6, 7, 9, 4, 10] = 7,2$

    b) Da ejemplos de funciones que se definan en términos de otras funciones recursivas.

16. Determiná el tipo de cada una de las funciones definidas a continuación, asignando un tipo apropiado a cada variable. Por ejemplo, consideremos la función *más* definida como:

$$\mathit{más}.xs.ys \doteq xs.0 + ys.0$$

Podemos construir el árbol de tipado para el *cuerpo* de la función (lo que está a la derecha de $\doteq$):

$$\begin{array}{c}
\underline{\;xs\;}\;.\;\underline{\;0\;}\;+\;\underline{\;ys\;}\;.\;\underline{\;0\;}\\
\underline{[\mathit{Num}].\mathit{Nat}}\quad\underline{[\mathit{Num}].\mathit{Nat}}\\
\underline{\;\mathit{Num}\quad+\quad\mathit{Num}\;}\\
\mathit{Num}
\end{array}$$

Luego las variables xs y ys son de tipo $[\mathit{Num}]$ y el resultado es de tipo Num. Notar además que todas las variables del cuerpo están listadas como parámetros de la función. Por lo tanto, el tipo de la función *más* es:

$$\mathit{más} : [\mathit{Num}] \to [\mathit{Num}] \to \mathit{Num}$$

Podes verificar los resultados programando en `haskell` las funciones y consultando en el interprete. Por ejemplo, la función *más* la podemos definir como

```
más xs ys = (xs !! 0) + (ys !! 0)
```

Una vez cargada la definición en el intérprete, invocando el comando `:t mas` obtenemos:

```
Main> :t más
más :: Num a => [a] -> [a] -> a
```

a) $g.x.y \doteq x \triangleright y$

b) $\mathit{duplicaLista}.xs \doteq xs +\!\!+\, xs$

c) $\mathit{cuadruplicaLista}.xs \doteq \mathit{duplicaLista}.(\mathit{duplicaLista}.xs)$

d) $\mathit{cabezaCero}.xs \doteq (\mathit{head}.xs = 0)$

e) $h.x \doteq [\mathit{head}.x] +\!\!+\, [\mathit{head}.x]$

f) $k.x.xs.y \doteq [x, y, xs.x + y]$

17. Dar un árbol de tipado que justifique que están bien escritas las definiciones que hiciste para el ejercicio 14.

Inducción

Una técnica poderosa para demostrar propiedades sobre un dominio inductivo, como son los naturales o las listas, es usar el ***principio de inducción****. La idea que rige este principio consiste en demostrar dos cosas. Por un lado verificar que la propiedad se satisface para los elementos "más chicos" del dominio (por ejemplo el* 0*, o la lista* $[\,]$*). Por otro lado demostrar para un elemento arbitrario del dominio (por ejemplo* $n+1$*, o la lista* $x \triangleright xs$*) que si suponemos que la propiedad es cierta para todos los elementos más chicos que él (por ejemplo* n*, o* xs*), entonces la propiedad también es satisfecha por ese elemento. Dado que todo elemento de un dominio inductivo puede ser "construido" a partir de elementos más simples, este procedimiento demuestra que la propiedad es satisfecha por todos los elementos del dominio, y por lo tanto es válida.*

18. Demostrá por inducción las siguientes propiedades. **Ayuda:** Recordá la definición de cada uno de los operadores implicados en cada expresión.

    a) $xs +\!\!+ [\,] = xs$ (la lista vacía es el elemento neutro de la concatenación)
    b) $\#xs \geqslant 0$
    c) $xs +\!\!+ (ys +\!\!+ zs) = (xs +\!\!+ ys) +\!\!+ zs$ (la concatenación es asociativa)
    d) $(xs +\!\!+ ys) \uparrow \#xs = xs$
    e) $(xs +\!\!+ ys) \downarrow \#xs = ys$
    f) $xs +\!\!+ (y \triangleright ys) = (xs \triangleleft y) +\!\!+ ys$
    g) $xs +\!\!+ (ys \triangleleft y) = (xs +\!\!+ ys) \triangleleft y$

19. Considerando la función $sum : [Num] \to Num$ del ejercicio 14, demostrá que:

$$sum.(xs +\!\!+ ys) = sum.xs + sum.ys$$

20. Considerando la función $repetir : Nat \to Num \to [Num]$, que construye una lista de un mismo número repetido cierta cantidad de veces, definida recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} repetir.0.x & \doteq & [\,] \\ repetir.(n+1).x & \doteq & x \triangleright repetir.n.x \end{array}$$

    demostrá que $\#repetir.n.x = n$.

21. Considerando las funciones *sum* y *duplica* de los ejercicios 7 y 14, demostrá que:

$$sum.(duplica.xs) = 2 * sum.xs$$

22. Considerando la función $concat : [[A]] \to [A]$ que toma una lista de listas y devuelve la concatenación de todas ellas, definida recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} concat.[\,] & \doteq & [\,] \\ concat.(xs \triangleright xss) & \doteq & xs +\!\!+ concat.xss \end{array}$$

    demostrá que $concat.(xss +\!\!+ yss) = concat.xss +\!\!+ concat.yss$

23. Considerando la función $rev : [A] \to [A]$ que toma una lista y devuelve una lista con los mismos elementos pero en orden inverso, definida recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} rev.[\,] & \doteq & [\,] \\ rev.(x \triangleright xs) & \doteq & rev.xs \triangleleft x \end{array}$$

    demostrá que $rev.(xs +\!\!+ ys) = rev.ys +\!\!+ rev.xs$

24. Considerando las funciones *bin2dec* : $[Int] \to Int$ y *repetirUnos* : $Int \to [Int]$ definidas recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} bin2dec.[\,] & \doteq & 0 \\ bin2dec.(x \triangleright xs) & \doteq & x + 2 * bin2dec.xs \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} repetirUnos.0 & \doteq & [\,] \\ repetirUnos.(n+1) & \doteq & 1 \triangleright repetirUnos.n \end{array}$$

demostrá que $bin2dec.(repetirUnos.n) = 2^n - 1$.

25. ☺ **Torres de Hanoi:** Se tienen tres postes numerados 0, 1 y 2, y n discos de distinto tamaño. Inicialmente se encuentran todos los discos ubicados en el poste 0, ordenados según el tamaño, con el disco más grande en la base. El problema consiste en llevar todos los discos al poste 2, con las siguientes restricciones:

   a) Se puede mover sólo un disco a la vez

   b) Sólo se puede mover el disco que se encuentra más arriba en algún poste.

   c) No se puede colocar un disco sobre otro de menor tamaño.

   Resolvé los siguientes items:

   a) Sea $B = \{0, 1, 2\}$. Definí la función *hanoi* : $B \to B \to B \to Nat \to [(B, B)]$ tal que $hanoi.a.b.c.n$ calcule la secuencia de *movimientos* para llevar n discos desde el poste a hacia el poste c, utilizando posiblemente el poste b de forma auxiliar. Un *movimiento* es un par (B, B) cuya primer componente indica el poste de salida, y la segunda el poste de llegada. Luego programála en `haskell`.

   Por ejemplo, *hanoi* para los postes 0, 1 y 2, con dos discos es: $hanoi.0.1.2.2 = [(0,1),\ (0,2),\ (1,2)]$

   b) Demostrá que $\#hanoi.a.b.c.n = 2^n - 1$

   c) ¿En qué movimiento se cambia de poste por primera vez el disco de mayor tamaño?

Apéndice

Niveles de Precedencia

$E(x := a)$, .	sustitución y evaluación
$\sqrt{\ }, (\cdot)^2$	raíces y potencias
$*, /$	producto y división
$\max, \min$	máximo y mínimo
$+, -$	suma y resta
$=, \leqslant, \geqslant$	operadores de comparación
$\neg$	negación
$\vee\ \wedge$	disyunción y conjunción
$\Rightarrow\ \Leftarrow$	implicación y consecuencia
$\equiv\ \not\equiv$	equivalencia y discrepancia

Tipos de los operadores

$-x$	$- : Num \to Num$
x^y	$(-)^{(-)} : Num \to Num \to Num$
$\sqrt[r]{x}$	$\sqrt{\ } : Num \to Num \to Num$
$x * y$	$* : Num \to Num \to Num$
x/y	$/ : Num \to Num \to Num$
$x \max y$	$\max : Num \to Num \to Num$
$x \min y$	$\min : Num \to Num \to Num$
$x + y$	$+ : Num \to Num \to Num$
$x - y$	$- : Num \to Num \to Num$
$x > y$	$>: Num \to Num \to Bool$
$x \geqslant y$	$\geqslant: Num \to Num \to Bool$
$x < y$	$<: Num \to Num \to Bool$
$x \leqslant y$	$\leqslant: Num \to Num \to Bool$
$x = y$	$=: Num \to Num \to Bool$
$\neg p$	$\neg : Bool \to Bool$
$p \wedge q$	$\wedge : Bool \to Bool \to Bool$
$p \vee q$	$\vee : Bool \to Bool \to Bool$
$head.xs$	$head : [A] \to A$
$tail.xs$	$tail : [A] \to [A]$
$x \triangleright xs$	$\triangleright : A \to [A] \to [A]$
$xs \triangleleft x$	$\triangleleft : [A] \to A \to [A]$
$xs \uparrow n$	$\uparrow: [A] \to Int \to [A]$
$xs \downarrow n$	$\downarrow: [A] \to Int \to [A]$
$xs +\!\!+\, ys$	$+\!\!+ : [A] \to [A] \to [A]$
$\#xs$	$\# : [A] \to Int$
$xs.n$	$(-).(-) : [A] \to Int \to A$

Operadores en `haskell`

x^2	`x^2`
x^n	`x^n` con n entero
x^p	`x**p`
$\sqrt{x}$	`sqrt x`
$\sqrt[r]{x}$	`x**(1/r)`
$x \max y$	``x `max` y`` o bien `max x y`
$x \min y$	``x `min` y`` o bien `min x y`
$x \geqslant y$	`x >= y`
$x \leqslant y$	`x <= y`
$x = y$	`x == y`
$\neg p$	`not p`
$p \wedge q$	`p && q`
$p \vee q$	`p || q`
$head.xs$	`head xs`
$tail.xs$	`tail xs`
$x \triangleright xs$	`x:xs`
$xs \triangleleft x$	`xs ++ [x]`
$xs \uparrow n$	`take n xs`
$xs \downarrow n$	`drop n xs`
$xs +\!\!+\, ys$	`xs ++ ys`
$\#xs$	`length xs`
$xs.n$	`xs !! n`