Introducción a los Algoritmos - 2do. cuatrimestre 2012

Guía 3: Semántica de Lógica Proposicional

Docentes: Walter Alini, Luciana Benotti, Marcos Gómez y Gisela Rossi

La lógica proposicional puede usarse como una formalización elemental del razonamiento deductivo. El objetivo general de esta guía es introducirnos a la lógica proposicional, como herramienta para describir problemas y razonar sobre los mismos.

Precedencia y tipado con operaciones booleanas

La lógica proposicional amplía el lenguaje que venimos manejando, introduciendo dos constantes que representan los valores de verdad (True y False) y diversos operadores booleanos sobre estos valores ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\equiv$, $\Rightarrow$). Esta lógica nos permite escribir expresiones que codifican propiedades mas interesantes, como por ejemplo que "si un número a es mayor a b y, además, b es mayor a c, entonces a tiene que ser mayor a c"*:*

$$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$$

Al complejizarse el lenguaje, es necesario establecer reglas de notación para poder escribir las expresiones con mayor claridad y sin ambigüedades. En particular, es posible eliminar paréntesis cuando los operadores involucrados son asociativos (i.e. *no importa el orden en que asocien los operandos), y según las reglas de precedencia, tal como hemos visto hasta ahora.*

Los operadores $\wedge$, $\vee$, $\equiv$, $\not\equiv$ ***son asociativos****. Esto nos permite establecer por ejemplo que las expresiones $p \wedge q \wedge r$, junto con $p \wedge (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ son equivalentes.*
A la derecha se listan los nuevos operadores y aquellos vistos anteriormente, en orden de mayor a menor precedencia.
En los siguientes ejercicios comenzamos trabajando principalmente con los aspectos ***sintácticos*** *del nuevo lenguaje, para asegurar una buena capacidad de lectura y escritura de las nuevas expresiones, y con la* ***semántica*** *de los nuevos operadores, es decir, su significado.*

Niveles de Precedencia

1	$\sqrt{\ }, (\cdot)^2$	raíces y potencias
2	$*, /$	producto y división
3	max , min	máximo y mínimo
4	$+, -$	suma y resta
5	$=, \leqslant, \geqslant$	operadores de comparación
6	$\neg$	negación
7	$\vee\ \wedge$	disyunción y conjunción
8	$\Rightarrow\ \Leftarrow$	implicación y consecuencia
9	$\equiv\ \not\equiv$	equivalencia y discrepancia

1. Sacá todos los paréntesis que sean *superfluos* según las reglas de precedencia de los operadores booleanos.

   a) $((((a = b) \wedge (b = c)) \Rightarrow (a = c)) \equiv \mathit{True})$

   b) $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \equiv q))$

   c) $(((p \wedge q) \vee (\neg r)) \Rightarrow (p \wedge (q \vee r)))$

2. Introducí paréntesis para hacer *explícita* la precedencia.

   a) $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

   b) $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$

   c) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

3. ¿Están bien escritas las siguientes expresiones? Para evitar errores, introducí paréntesis de acuerdo a las reglas de precedencia, y en caso de ser posible escribí una tabla declarando el tipo de cada variable.

   a) $((\mathit{True} \wedge \mathit{False}) \Rightarrow \mathit{False}) \equiv \mathit{False}$

   b) $2 = 3 \vee 3 = 4 \vee a * a + 2 \leqslant b + 7$

   c) $(x \wedge y \equiv a) \wedge z \leqslant w$

   d) $x + 3 \Rightarrow y$

   e) $(x + 3 = y) \wedge \neg z$

   f) $a \vee b = 3 + y$

g) $a \geqslant b \wedge 3+2<4 \;\Rightarrow\; c \equiv b+1=2$

h) $a+2 \geqslant c \Rightarrow 3+2<b \;\equiv\; c \equiv b = 2*a$

i) $\neg a * b + c = d \vee p \Rightarrow q \equiv r \Leftarrow s \wedge j = k + l * m$

Evaluación de Expresiones Proposicionales: Satisfactibilidad y Validez

4. Evaluá las siguientes expresiones *booleanas*, subrayando la subexpresión resuelta en cada paso, y justificando. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
& \underline{(\mathit{False} \vee \mathit{True})} \wedge \mathit{False} \equiv \mathit{False} \\
\equiv & \; \{ \text{ def. de } \vee \; \} \\
& \underline{\mathit{True} \wedge \mathit{False}} \equiv \mathit{False} \\
\equiv & \; \{ \text{ def. de } \wedge \; \} \\
& \mathit{False} \equiv \mathit{False} \\
\equiv & \; \{ \text{ def. de } \equiv \; \} \\
& \mathit{True}
\end{aligned}
$$

   a) $((\mathit{True} \wedge \mathit{True}) \vee \mathit{False}) \equiv \mathit{False} \vee \mathit{True}$

   b) $7>4 \wedge 4>7$

   c) $7>4 \vee 4>7$

   d) $5>3 \wedge 3>1 \Rightarrow 5>1$

   e) $\mathit{False} \Rightarrow 2+2=5$

   f) $2+2=5 \Rightarrow \mathit{True}$

En `haskell` los distintos operadores booleanos se pueden escribir así:

$\neg p$	`not p`
$p \wedge q$	`p && q`
$p \vee q$	`p || q`
$p \equiv q$	`p == q`
$p \not\equiv q$	`p /= q`

5. Definir en `haskell` una función *impl* : *Bool* → *Bool* → *Bool* que se comporte de acuerdo a la tabla de verdad de ⇒. Si queremos escribirla de manera *infija* (i.e., con el nombre de la función "en el medio") debemos rodearla con acentos graves (‘) . Por ejemplo:

```
Prelude> let impl p q =  (aquí va tu respuesta!)
Prelude> impl True False
False
Prelude> True ‘impl‘ False
False
```

6. Evaluá las siguientes fórmulas proposicionales, utilizando la siguiente asignación $p \doteq \mathit{True}$, $q \doteq \mathit{False}$ y $r \doteq \mathit{False}$. Subrayá la subexpresión resuelta en cada paso y justificá.

   a) $p \Rightarrow \neg q$

   b) $p \Rightarrow (q \equiv r)$

   c) $\neg p \equiv (\neg q \vee (q \vee r))$

   d) $(q \Rightarrow (p \equiv \neg r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow (r \equiv r))$

   e) $\neg(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg(r \equiv (p \wedge q)) \Rightarrow \neg(p \vee \neg q))$

7. Usá un intéprete de `haskell` para verificar los resultados. Por ejemplo, para el ítem 6*a*,

```
Prelude> let f (p,q) = p ‘impl‘ (not q)
Prelude> f (True,False)
True
Prelude> map f [(True,True),(True,False),(False,True),(False,False)]
[False,True,True,True]
```

8. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una tabla de verdad, un ejemplo o un contraejemplo, según corresponda.

a) p

b) $p \equiv p$

c) $p \equiv p \equiv p$

d) $p \Rightarrow q$

e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Especificaciones con Expresiones Proposicionales

9. Representá con una fórmula de lógica proposicional los siguientes enunciados. Usá el símbolo de predicado p para representar $(a < b)$, q para representar $(b < c)$, y r para $(a < c)$.

    a) $a < b < c$

    b) Si $a < b$ entonces no es el caso que $(a \geq c)$

    c) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $(a \geq c)$

    d) No es el caso que $(a < b$ y $a < c)$

    e) (No es el caso que $(a < b$ y $(a < c$ ó $b < c)))$ ó $(a \geq b$ y $a < c)$

10. Escribí una fórmula proposicional para cada una de las siguientes frases, utilizando una variable proposicional para cada sentencia atómica, aclarando siempre el significado escogido para cada variable. A veces es conveniente reescribir las frases para hacer más claro su sentido. Por ejemplo, la frase

    Hoy es martes o jueves

    puede pensarse como dos oraciones unidas por una disyunción, pudiendo reescribirse como:

    Hoy es martes **u hoy es** jueves

    Entonces podemos formalizarla con la fórmula $p \vee q$, utilizando p para la primer sentencia y q para la segunda, es decir, definiendo:

    $$p \doteq \text{hoy es martes}$$
    $$q \doteq \text{hoy es jueves}$$

    En lo posible utilizá un mismo símbolo de proposición para la misma sentencia atómica a lo largo de todo el ejercicio, para poder comparar las fórmulas.

    a) Hoy es martes y hay sol.

    b) Hoy es martes y no hay sol.

    c) Hoy no es ni miércoles ni viernes.

    d) Mañana, llueve o no llueve.

    e) Mañana será jueves y no será jueves.

    f) Hoy es viernes, pero tengo clases de Algoritmos.

    g) Yo no voy de vacaciones y Juan y Pedro tampoco.

    h) Juan vendrá a clase, y seguro que vendrán también María o Pedro.

    i) Si no tienes menos de 18 años ni tienes antecedentes puedes irte a vivir a otro país.

    j) No es verdad que si tienes menos de 16 años y consentimiento paterno te puedas casar.

Formalización de razonamientos

Una tarea muy importante en el desarrollo de software es el modelado de problemas. *Cuando nos encontramos con un problema a resolver la primera tarea que se plantea es cómo expresar este problema ordenadamente para trabajar con rigor en su solución. En el tipo de ejercicio mencionado arriba se trabaja formalizando razonamientos lógicos sobre el cálculo proposicional. La idea principal consiste en modelar oraciones del lenguaje natural en términos proposicionales.*

$\neg$	*"No –", "Es falso que –", "No es el caso que –", etc.*
$\wedge$	*"– y –", "–, pero –", "–, sin embargo –",*
$\vee$	*"– o –", "– o – o ambos –".*
$\Rightarrow$	*"[Si] – entonces –", "– luego –", "–. Como consecuencia, –"*
$\equiv$	*"– si y sólo si –", "Son equivalentes – y –".*
$\not\equiv$	*"O bien – o –".*

11. Formalizá los siguientes razonamientos en la lógica proposicional. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una tabla de verdad, o un contraejemplo, según corresponda. Ejemplo:

Enunciado: Si el gobernador quiere mejorar su imagen, o mejora su política social o gasta más en publicidad. El gobernador no mejora su política social. Luego, si el gobernador quiere mejorar su imagen, entonces deberá gastar más en publicidad.

Solución: Si utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

$$i \doteq \text{el gobernador quiere mejorar su imagen}$$
$$s \doteq \text{el gobernador mejora su política social}$$
$$p \doteq \text{el gobernador gasta más en publicidad}$$

podemos especificar la primera oración con la fórmula $i \Rightarrow s \vee p$, la segunda con $\neg s$, y la tercera con $i \Rightarrow p$. La primera y segunda oraciones son las *hipótesis del razonamiento*, y la final la *conclusión*. Un razonamiento de este tipo es correcto cuando la conjunción de las hipótesis $P_1, P_2, \ldots, P_n$ implica la conclusión C, es decir cuando la siguiente fórmula es válida:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$$

En nuestro ejemplo, el razonamiento completo se puede formalizar como:

$$(i \Rightarrow s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$$

Este razonamiento válido y su validez puede ser mostrada con una tabla de verdad.

a) Si hago mucho deporte estoy cansado. No estoy cansado, por lo tanto no hago mucho deporte.

b) Si hago mucho deporte estoy cansado. Estoy cansado, por lo tanto hago mucho deporte.

c) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Es el caso que llueve y no tengo paraguas, por lo tanto, me mojo y me resfrío.

d) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. No me mojo y me resfrío, por lo tanto, si llueve, tengo paraguas.

e) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Me mojo y me resfrío, por lo tanto, si llueve, no tengo paraguas.

f) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes y llueve, tenemos clase y llueve.

g) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes y llueve, tenemos clase.

h) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes, o tenemos clase o llueve.

i) Si el gobernador quiere mejorar su imagen entonces mejora su política social. El gobernador no mejora su política social por lo tanto no quiere mejorar su imagen.

j) Si el presidente entiende las protestas de la gente entonces si quiere ser reelegido cambiará su política. El presidente quiere ser reelegido. Luego, si el presidente entiende las protestas de la gente, entonces cambiará su política.