Introducción a los Algoritmos - 2do. cuatrimestre 2015

Guía 3: Lógica de Predicados

Docentes: Araceli Acosta, Walter Alini, Luciana Benotti, Alejandro Gadea

La lógica de cuantificadores o lógica de primer orden es el sistema lógico estándar que formaliza el sistema deductivo natural. El objetivo general de esta guía es aprender a manipular fórmulas con cuantificadores universal (∀) y existencial (∃), tanto para interpretar su significado, como para utilizarlas para expresar propiedades, modelar problemas de razonamiento, etc. Uno de los objetivos específicos más importantes es extender las habilidades logradas en el cálculo proposicional, para realizar demostraciones formales en este sistema lógico.

Interpretación y construcción de modelos en Lógica de Predicados

La lógica de cuantificadores extiende la lógica proposicional, incorporando dos operadores de ***cuantificación****. Si expresamos un* predicado *con $T.x$, por ejemplo*

$$T.x \doteq \text{x es múltiplo de 3}$$

el cuantificador universal ∀ permite expresar la fórmula $T.x$, se satisface para todo valor posible de x, en este caso que todo x es múltiplo de 3. Esto se denota por $\langle \forall x :: T.x \rangle$. Por otro lado, el cuantificador existencial ∃, expresa que la propiedad es satisfecha por al menos un valor posible de x, lo que se denota como $\langle \exists x :: T.x \rangle$. En este caso, existe un x que es múltiplo de 3.

Por ejemplo, si suponemos que x es una variable del universo de los hombres, y el predicado mortal.x dice que x es mortal, podemos expresar la sentencia "Todos los hombres son mortales" con la fórmula:

$$\langle \forall x :: mortal.x \rangle$$

En general, tanto para ∀ como para ∃, no suponemos que las variables pertenecen a ningún universo dado. Para distinguir entonces el universo al que nos referimos, utilizamos predicados arbitrarios $R.x$, quedando las fórmulas denotadas como:

$$\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \qquad \langle \exists x : R.x : T.x \rangle$$

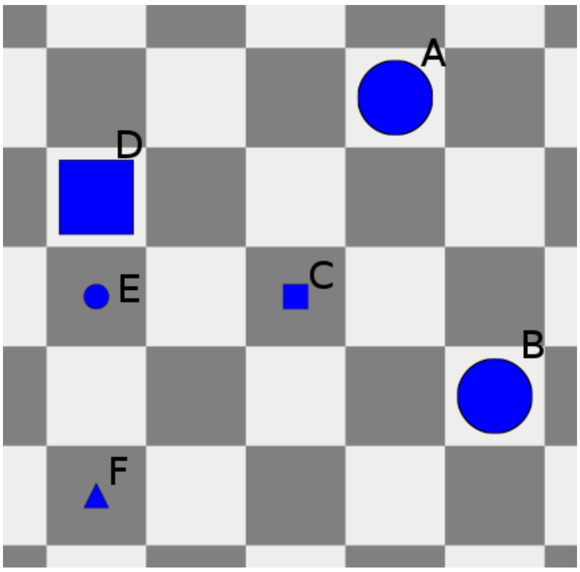
Suponiendo el significado obvio para el predicado hombre, el ejemplo anterior se formaliza como:

$$\langle \forall x : hombre.x : mortal.x \rangle$$

Notá que por la notación fija de las expresiones cuantificadas no puede haber confusiones con la precedencia y asociatividad.

En los siguientes ejercicios se trabaja intentado clarificar el significado de los nuevos operadores de cuantificación, para lograr la capacidad de leer *y* escribir *fórmulas que los involucran.*

1. Dado el siguiente mundo



- decidí si las siguientes sentencias son satisfechas o no (y por qué). Por ejemplo, la sentencia "Hay un cuadrado grande" se satisface por el objeto D. Sin embargo, la frase "Todos los círculos son grandes", no se satisface a causa del círculo chico E.
- Expresá formalmente cada sentencia y verificala en `sat`.

a) Todos los triángulos son chicos.

b) Existe un cuadrado grande.

c) Todos los círculos son azules y pequeños.

d) Ningún triángulo es grande.

e) No hay círculos amarillos ni verdes.

f) Existe (al menos) un cuadrado chico.

g) A está a la derecha de todo.

h) Nada está a la derecha de B.

i) F está entre D y E.

j) Hay un único cuadrado azul.

k) Si hay círculos rojos entonces hay cuadrados rojos.

2. Construí un mundo en el que se satisfagan progresivamente cada una de las siguientes sentencias, utilizando cuadrados, círculos y triángulos, chicos o grandes. Formalizá las oraciones con la lógica de predicados.

a) Algo es grande.

b) Hay un cuadrado.

c) Hay un cuadrado grande.

d) Un cuadrado grande está a la izquierda de B.

e) Algo que está a la izquierda de B está arriba de C.

f) Algún círculo no es grande.

3. Formalizá las siguientes sentencias escritas en lenguaje natural, utilizando cuantificadores y predicados arbitrarios para aquellas propiedades elementales. Por ejemplo, para la sentencia "Hay enteros pares" puede formalizarse con la fórmula:

$$\langle \exists x \,:\, \mathit{entero}.x \,:\, \mathit{mod}.x.2 = 0 \rangle$$

a) Todo entero es par o impar.

b) El producto de dos impares es impar.

c) Dados dos números enteros positivos, existe un tercer entero tal que el primer entero multiplicado por el tercer entero es mayor que el segundo entero.

d) Un entero positivo es primo si y sólo si, ningún número distinto de él y de 1 lo divide.

e) Existe un único y tal que se da $R.y$.

f) Para todo x hay un único y tal que su producto es diez.

g) Existen dos números enteros menores a diez.

h) m es el menor valor que asume $f : \mathit{Num} \to \mathit{Num}$.

i) f es una función creciente con argumentos en Num.

j) f es una función inyectiva de tipo $A \to B$.

k) f es una función sobreyectiva de tipo $A \to B$.

l) f es una función biyectiva de A en B

m) el menor o igual ($\leqslant$) es transitivo.

Demostraciones de lógica de predicados

En los siguientes ejercicios se deben hacer demostraciones en el Cálculo de Predicados, utilizando los axiomas y teoremas sobre cuantificadores, además de los axiomas y teoremas del Cálculo Proposicional que venimos utilizando.

4. Demostrá justificando cada paso con axiomas del cálculo de cuantificadores los siguientes teoremas básicos:

   a) *Partición de Rango del* $\forall$: $\langle \forall x : R.x \vee S.x : T.x \rangle \equiv \langle \forall x : R.x : T.x \rangle \wedge \langle \forall x : S.x : T.x \rangle$
   b) *Partición de rango para* $\exists$: $\langle \exists x : R.x \vee S.x : T.x \rangle \equiv \langle \exists x : R.x : T.x \rangle \vee \langle \exists x : S.x : T.x \rangle$
   c) *Regla del Término del* $\exists$: $\langle \exists x :: T.x \rangle \vee \langle \exists x :: U.x \rangle \equiv \langle \exists x :: T.x \vee U.x \rangle$
   d) *Rango unitario:* $\langle \exists x : x = Y : T.x \rangle \equiv T.Y$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T
   e) *Intercambio entre rango y término:* $\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \equiv \langle \exists x :: R.x \wedge T.x \rangle$.
   f) *Distributividad de* $\wedge$ *con* $\exists$: $X \wedge \langle \exists x :: T.x \rangle \equiv \langle \exists x :: X \wedge T.x \rangle$, siempre que x no ocurra en X.
   g) *Rango vacío del* $\forall$: $\langle \forall x : \mathit{False} : T.x \rangle \equiv \mathit{True}$
   h) *Rango vacío del* $\exists$: $\langle \exists x : \mathit{False} : T.x \rangle \equiv \mathit{False}$
   i) *Regla del Término constante del* $\forall$: $\langle \forall x :: C \rangle \equiv C$
   j) *Regla del Término constante del* $\exists$: $\langle \exists x :: C \rangle \equiv C$
   k) *Instanciación:* $\langle \forall x :: T.x \rangle \Rightarrow T.Y$ siempre que Y no ocurra cuantificada en T.
   l) *Testigo:* $T.Y \Rightarrow \langle \exists x :: T.x \rangle$ siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

5. Utilizá los axiomas y teoremas del cálculo de predicados para simplificar las siguientes expresiones. Luego, construí un único modelo en el que se satisfagan, simultáneamente.

   a) $\langle \forall x : \neg \mathit{Rojo}.x \vee \mathit{Tr}.x : \langle \exists y : (x = y) : \mathit{Grande}.y \rangle \rangle$
   b) $\langle \exists x : \mathit{Rojo}.x : \langle \exists y :: \mathit{Rojo}.x \equiv \neg \mathit{Rojo}.y \rangle \rangle$
   c) $\langle \forall x : \mathit{Cuad}.x : \langle \exists y : \neg (x = y) : \mathit{Tr}.y \rangle \rangle$
   d) $\langle \forall x : \mathit{Rojo}.x : \mathit{Cuad}.x \wedge \langle \exists y :: \mathit{Grande}.x \rangle \rangle$

   Para evitar confusiones, dibujá el modelo nombrando cada figura, y luedo indicá las propiedades (forma, color, tamaño) que cada una tiene. Por ejemplo "e_1 es triángulo, rojo, grande".

6. Demostrá que las siguientes fórmulas son válidas, justificando en cada paso el axioma o teorema del Cálculo de Predicados utilizado.

   a) $\langle \forall x : \mathit{Circ}.x : \mathit{Grande}.x \rangle \equiv \langle \forall x : \neg \mathit{Grande}.x : \neg \mathit{Circ}.x \rangle$
   b) $\langle \exists x : \mathit{Cuad}.x : \mathit{Chico}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x :: \mathit{Cuad}.x \rangle$
   c) $\neg \langle \exists x :: \mathit{Tr}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Rojo}.x \rangle$
   d) $\langle \exists x :: \mathit{Cuad}.x \rangle \wedge \langle \forall y :: \mathit{Grande}.y \rangle \Rightarrow \langle \exists x :: \mathit{Cuad}.x \wedge \mathit{Grande}.x \rangle$

   En todos los items anteriores, ¿es posible cambiar los predicados *Circ*, *Grande*, *Cuad*, etc. por predicados arbitrarios R, T, S, etc. manteniendo la validez de las fórmulas? Dicho de otro modo ¿la validez de las formulas anteriores depende de los predicados específicos *Circ*, *Grande*, *Cuad*, etc?

7. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una demostración, ejemplo o contraejemplo.

   a) $\langle \forall x :: \mathit{Cuad}.x \vee \mathit{Chico}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x :: \mathit{Cuad}.x \rangle \vee \langle \forall x :: \mathit{Chico}.x \rangle$
   b) $\langle \forall x :: \mathit{Cuad}.x \vee \mathit{Chico}.x \rangle \Leftarrow \langle \forall x :: \mathit{Cuad}.x \rangle \vee \langle \forall x :: \mathit{Chico}.x \rangle$
   c) $\langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \rangle \wedge \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Azul}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \wedge \mathit{Azul}.x \rangle$
   d) $\langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \rangle \wedge \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Azul}.x \rangle \Leftarrow \langle \exists x : \mathit{Tr}.x : \mathit{Grande}.x \wedge \mathit{Azul}.x \rangle$

Aplicaciones del Cálculo de Predicados

El ***análisis de razonamientos lógicos*** *busca determinar si un razonamiento, normalmente descripto en lenguaje natural, es válido o no, es decir, si la conclusión se desprende lógicamente de las hipótesis. Muchos razonamientos, dada su complejidad, no pueden ser modelados en lógica proposicional y resulta necesario utilizar lógica de predicados para lograr modelarlos de forma más precisa.*

Independientemente de la lógica que utilicemos para modelar un razonamiento con hipótesis (o premisas) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *y conclusión* C*, decimos que es* correcto *si la fórmula* $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ *es un teorema. Nada importa en este caso si la conclusión por sí misma es verdad o no en el mundo real. Lo único que interesa al razonamiento es si es posible deducir la conclusión a partir de las hipótesis y las reglas de la lógica.*

Por el contrario, para mostrar que un razonamiento no es correcto es necesario encontrar un ejemplo que contradiga al razonamiento (contraejemplo), esto es, alguna situación (o "mundo") que cumpla con todas las premisas pero no con la conclusión. Esto muestra que no necesariamente la conclusión se deduce de las hipótesis.

Los siguientes ejercicios tratan sobre el análisis de razonamientos utilizando el Cálculo de Predicados.

8. Formalizá los siguientes razonamientos:

   a) Algún cuadrado es azul, por lo tanto algo azul es un cuadrado.

   b) Ningún cuadrado es grande, por lo tanto nada grande es un cuadrado.

   c) Todos las círculos son grandes y rojos. Existen círculos con pintitas rosas. Luego, existe algo grande que tiene pintitas rosas.

   d) No existe ningún unicornio, por lo tanto todo unicornio tiene dos cuernos.

   e) Todos los directivos del FMI son corruptos y mentirosos. Existen directivos del FMI inútiles. Luego, existen corruptos inútiles.

9. Demostrá la propiedad $\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : R.x \wedge Q.x : T.x \wedge Q.x \rangle$. Luego,

   a) demostrá que el siguiente razonamiento es válido:

   Todo elefante es un animal, luego todo elefante gris es un animal gris

   b) ¿por qué no es válido el siguiente razonamiento, aparentemente igual al anterior?:

   Todo elefante es un animal, luego todo elefante pequeño es un animal pequeño

10. Formalizá y analizá los siguientes razonamientos. Decidí si son válidos o no. Justificá a través de una tabla de verdad o un contraejemplo.

    a) Todo cuadrado es azul. `a` no es un cuadrado. Luego `a` no es azul.

    b) Todos los artistas son ególatras, algunos artistas son indigentes, luego algunos indigentes son ególatras.

    c) Todos los anarquistas son partidarios de la fuerza y la violencia, todos los militaristas son partidarios de la fuerza y la violencia, luego todos los militaristas son anarquistas.

    d) Ningún ateo tiene fe en el Señor, pero todos los que tienen fe en el Señor son hombres sabios, por lo tanto, ningún ateo es un hombre sabio.

    e) Todo hombre es mamífero, algunos animales no son mamíferos, por lo tanto algunos animales no son hombres.

    f) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, algunos pájaros no son hombres.

    g) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, ningún pájaro es hombre.

    h) Algunos hombres no son corruptos. Todos los políticos son corruptos. Por lo tanto, algunos hombres no son políticos.

    i) Todo aquel que tome cianuro, se morirá. La abuela no ha tomado cianuro, luego no morirá.