Introducción a los Algoritmos - 2do. cuatrimestre 2011

Guía 4: Cálculo Proposicional y Aplicaciones

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso Alemani, Walter Alini, Luciana Benotti, Ezequiel Orbe

El objetivo principal de esta guía es lograr un buen entrenamiento de las habilidades necesarias para realizar una demostración formal en un sistema lógico sencillo, el Cálculo Proposicional. *Además, trabajaremos sobre una aplicación muy sencilla que nos ayude a comprender su utilidad y potencialidad.*

Especificaciones con Expresiones Proposicionales

1. Representá con una fórmula de lógica proposicional los siguientes enunciados. Usá el símbolo de predicado p para representar $(a < b)$, usá q para representar $(b < c)$, y r para $(a < c)$.

    a) $a < b < c$
    b) Si $a < b$ entonces no es el caso que $(a \geq c)$.
    c) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $(a \geq c)$
    d) No es el caso que $(a < b$ y $a < c)$
    e) (No es el caso que $(a < b$ y $(a < c$ ó $b < c)))$ ó $(a \geq b$ y $a < c)$

2. Escribí una fórmula proposicional para cada una de las siguientes frases, utilizando una variable proposicional para cada sentencia atómica, aclarando siempre el significado escogido para cada variable. A veces es conveniente reescribir las frases para hacer mas claro su sentido. Por ejemplo, la frase

    Hoy es martes o jueves

    puede pensarse como dos oraciones unidas por una disyunción, pudiendo reescribirse como:

    Hoy es martes **u hoy es** jueves

    Entonces podemos formalizarla con la fórmula $p \vee q$, utilizando p para la primer sentencia y q para la segunda, es decir, definiendo:

    $$p \doteq \text{hoy es martes}$$
    $$q \doteq \text{hoy es jueves}$$

    En lo posible utilizá un mismo símbolo de proposición para la misma sentencia atómica a lo largo de todo el ejercicio, para poder comparar las fórmulas.

    a) Hoy es martes y hay sol.
    b) Hoy es martes y no hay sol.
    c) Hoy no es ni miércoles ni viernes.
    d) Mañana, llueve o no llueve.
    e) Mañana será jueves y no será jueves.
    f) Hoy es viernes, pero tengo clases de Algoritmos.
    g) Yo no voy de vacaciones y Juan y Pedro tampoco.
    h) Juan vendrá a clase, y seguro que vendrán también María o Pedro.
    i) Si no tienes menos de 18 años ni tienes antecedentes puedes irte a vivir a otro país.
    j) No es verdad que si tienes menos de 16 años y consentimiento paterno te puedas casar.

Cálculo Proposicional

Una demostración en el Cálculo Proposicional que veremos en este curso consiste en probar la **validez** *de una fórmula mediante una serie de pasos justificados con* **axiomas** *y* **teoremas** *del Cálculo. Recordemos que una fórmula es válida si para toda asignación posible de las variables es equivalente a True; por lo tanto una demostración será una serie de fórmulas, equivalentes entre sí, donde la primera fórmula es la que queremos demostrar válida y la última es True. Por ejemplo:*

$$
\begin{array}{ll}
 & P \\
\equiv & \{ \texttt{Razón 1} \} \\
 & Q \\
\equiv & \{ \texttt{Razón 2} \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
 & (x > 0) \vee (x \leqslant 0) \\
\equiv & \{ \text{ Aritmética } \} \\
 & (x > 0) \vee \neg(x > 0) \\
\equiv & \{ \text{ Tercero excluido } (p \vee \neg p) \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

El ejemplo general de la izquierda, donde se quiere demostrar que la fórmula P es válida, se puede leer de la siguiente manera: Debido a la `Razón 1` P es equivalente a Q y debido a la `Razón 2` Q es equivalente a True. Por lo tanto, como el equivalente es transitivo, se concluye que P es equivalente a True. Por supuesto que este ejemplo de dos pasos se puede generalizar a cualquier cantidad necesaria de pasos.

Un caso particular, pero muy utilizado, es cuando la fórmula que se quiere demostrar es de la forma $P \equiv Q$; por ejemplo, $p \vee q \equiv q \vee p$. Para demostrar la validez de la fórmula podemos seguir la estrategia planteada anteriormente transformando la expresión completa en True, o bien partir de la subexpresión P y transformarla en la subexpresión Q (o viceversa). En ambos casos, cada paso de "transformación" consiste en "reescribir" la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos.

Cada axioma o teorema nos habilita a reescribir una expresión de diversas maneras. Por ejemplo la Regla Dorada, cuya formulación es $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$, nos permite reescribir la expresión $P \wedge Q$ por $P \equiv Q \equiv P \vee Q$, pero también:

$$
\begin{array}{rcl}
P \wedge Q \equiv P & \text{por} & Q \equiv P \vee Q \\
Q \equiv P \vee Q & \text{por} & P \wedge Q \equiv P \\
P \wedge Q \equiv P \vee Q & \text{por} & P \equiv Q \\
P \wedge Q \equiv Q \equiv P \vee Q & \text{por} & Q \\
P \equiv P \vee Q & \text{por} & P \wedge Q \equiv Q \\
\text{etc} \ldots & &
\end{array}
$$

Notá además que el lugar de las variables P, Q y R en un axioma o teorema puede ser ocupado por cualquier expresión booleana (de tipo Bool), ya sean variables proposicionales, como p, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q \vee r$, etc, o fórmulas más concretas como $2 * 2 = 4$, $x \leqslant 0$, etc.

Sustitución y Regla de Leibniz

Dos herramientas muy importantes en el Cálculo Proposicional son la sustitución y la regla de Leibniz.

Leibniz introdujo la propiedad de que es posible sustituir en una fórmula algunos elementos por otros que satisfacen el predicado de igualdad con ellos, es decir, iguales a éstos que se están reemplazando, sin que esto altere el significado de la expresión. Una idea intuitiva de esta regla se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$
\left\{ \begin{array}{lcll} x & = & 5 & (1) \\ y & = & x + 3 & (2) \end{array} \right.
\xrightarrow{\textit{Utilizo (1) en (2)}}
\left\{ \begin{array}{lcll} x & = & 5 & (1) \\ y & = & 5 + 3 & (2) \end{array} \right.
$$

En este ejemplo, ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes.

En las demostraciones del Cálculo se utiliza todo el tiempo la regla de Leibniz para "transformar" fórmulas. Por ejemplo, si se cumple $p \vee p \equiv p$, se puede transformar la fórmula $p \wedge q$ a la fórmula $(p \vee p) \wedge q$ donde se reemplazó p por otra expresión equivalente, $p \vee p$.

Combinando sustitución con la regla de Leibniz se puede obtener transformaciones más interesantes. Por ejemplo, si se cumple $p \vee p \equiv p$ y a esta expresión se le realiza la sustitución $(p := x > 0)$ se obtiene una nueva fórmula $(x > 0 \vee x > 0 \equiv x > 0)$. Esta nueva fórmula se puede utilizar para "transformar' otra expresión.

Observar que en ambos casos se utilizó la expresión condicional "si se cumple" por lo que hay que ser cuidadoso en dónde se aplica. Una regla que se puede utilizar en esta materia para no cometer errores es asegurarse que la fórmula sea válida, específicamente, que sea un axioma o teorema.

3. Encontrá las dos expresiones equivalentes entre sí, que fueron utilizadas para transformar la primera expresión en la última y escribila entre las llaves. Comprobá si corresponde a algún axioma o teorema enumerado en el digesto de axiomas y teoremas. Subrayá la expresión que está siendo reemplazada e la primer fórmula.

   Por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} & q \equiv p \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & q \equiv p \vee p \end{array}$$

   se puede observar que la equivalencia utilizada es $p \vee p \equiv p$ que se llama idempotencia de la disyunción. Como reeplazamos p la subrayamos.

$$\begin{array}{ll} & q \equiv \underline{p} \\ \equiv \{ & \text{Idempotencia de la disyunción } (p \vee p \equiv p) \;\; \} \\ & q \equiv p \vee p \end{array}$$

   a)
$$\begin{array}{ll} & p \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \equiv \mathit{True} \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & (p \equiv \mathit{True}) \Rightarrow q \end{array}$$

   c)
$$\begin{array}{ll} & p \vee (q \equiv r) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \vee q \equiv p \vee r \end{array}$$

   d)
$$\begin{array}{ll} & q \Rightarrow p \vee q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & q \Rightarrow (p \equiv q \equiv p \wedge q) \end{array}$$

4. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de forma que la sustitución $(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ justifique cómo fue aplicado cada axioma o teorema para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones. En todos los casos enunciá la fórmula cuya validez se demuestra. Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

   Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

$$\begin{array}{ll} & \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \\ \equiv \{ & \textit{(Definición de negación)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;\} \\ & \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array}$$

   demuestra la validez de la fórmula: $\neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p$
   utilizando el axioma "Definición de negación": $\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q.$
   con la sustitución $P, Q := (p \Rightarrow q), p$

   Viéndolo de otro modo, ¿qué sucede si aplicamos la sustitución $(P, Q := (p \Rightarrow q), p)$ al axioma "Definición de negación"?:

$$\begin{array}{ll} & (\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q)(P, Q := (p \Rightarrow q), p) \\ \equiv \{ & \textit{Definición de sustitución} \;\} \\ & \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array}$$

   Obtenemos exactamente la fórmula a demostrar, lo que verifica que efectivamente $\mathcal{E} \doteq p \Rightarrow q$ y $\mathcal{F} \doteq p$ es una solución.

   Para encontrar la sustitución no existe un método preciso. Podemos pensar en las variables P, Q y R de los axiomas como "comodines" diferentes, cada uno de los cuales puede representar una fórmula cualquiera (tan grande como queramos), pero de manera coherente: el lugar de un comodín es ocupado siempre por la ***misma*** *fórmula. Una vez que tenemos la fórmula cuya validez es demostrada por el paso deductivo, la ubicación de los paréntesis y de los operadores ayuda a encontrar la sustitución utilizada. A continuación la primera es la fórmula a demostrar, y la segunda el axioma visto con "comodines":*

$$\begin{array}{l} \neg(\,p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg\,(p \Rightarrow q) \equiv p \\ \neg(\quad \diamondsuit \quad \equiv \clubsuit) \equiv \neg \quad\; \diamondsuit \quad\; \equiv \clubsuit \end{array}$$

Claramente el lugar de $\diamondsuit$ lo ocupa $p \Rightarrow q$, y el lugar de $\clubsuit$, la variable p.

Aclaración: Consultar la fórmula correspondiente a cada axioma o teorema en el digesto de axiomas y teoremas.

a)
$$\begin{aligned} & p \equiv q \equiv r \\ \equiv & \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & r \equiv p \equiv q \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & p \vee q \vee (\mathit{False} \equiv \neg q) \\ \equiv & \{ \text{ (Distributividad } \vee \text{ con } \equiv)(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \ \} \\ & p \vee q \vee \mathit{False} \equiv p \vee q \vee \neg q \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} & \neg p \wedge (r \Rightarrow s) \\ \equiv & \{ \text{ (Regla dorada)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & \neg p \equiv r \Rightarrow s \equiv \neg p \vee (r \Rightarrow s) \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} & n \ \text{ mód } 4 = 0 \Rightarrow n \ \text{ mód } 2 = 0 \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & n \ \text{ mód } 4 = 0 \vee n \ \text{ mód } 2 = 0 \equiv n \ \text{ mód } 2 = 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} & x > 2 \vee y > 5 \equiv x > 2 \vee \neg y > 5 \\ \equiv & \{ \text{ (Teorema } *)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & x > 2 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} & \neg(p \wedge q \wedge r \Rightarrow p \wedge s) \\ \equiv & \{ \text{ (Negación de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & p \wedge q \wedge r \wedge \neg(p \wedge s) \end{aligned}$$

5. Completá las siguientes demostraciones especificando el axioma o teorema utilizado y la sustitución correspondiente; subrayá la subexpresión donde se aplica.

a)
$$\begin{aligned} & \neg\neg\neg p \equiv q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & \neg p \equiv q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & \neg(p \equiv q) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & p \not\equiv q \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & p \vee (q \equiv r \equiv s) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & p \vee (q \equiv r) \equiv p \vee s \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & p \vee q \equiv p \vee r \equiv p \vee s \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} & p \Rightarrow q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & p \vee q \equiv q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & q \equiv p \vee q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & p \wedge q \equiv p \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} & \neg p \equiv \neg q \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & \neg(p \equiv \neg q) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & \neg(\neg q \equiv p) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & \neg\neg(q \equiv p) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & \neg\neg(p \equiv q) \\ \equiv & \{ \qquad\qquad \} \\ & p \equiv q \end{aligned}$$

Equivalencia, Discrepancia y Negación

6. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas *válidas*. Realizá la demostración con máximo nivel de detalle, esto es, justificando cada paso con un axioma y la sustitución utilizada en el mismo. Como ejemplo demostramos la *Asociatividad de la discrepancia*: $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$, partiendo de la parte izquierda:

$$\begin{aligned} & (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(Q := (q \not\equiv r)) \ \} \\ & \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := q, r) \ \} \\ & \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, r) \ \} \\ & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := (p \equiv \neg q), r) \ \} \\ & \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\ \equiv & \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(Q := \neg q) \ \} \\ & \underline{(\neg q \equiv p)} \not\equiv r \\ \equiv & \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, p) \ \} \\ & \neg\underline{(q \equiv p)} \not\equiv r \\ \equiv & \{ \text{ Conmutatividad de } \equiv \} \\ & \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\ \equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \} \\ & (p \not\equiv q) \not\equiv r \end{aligned}$$

a) *Reflexibidad del equivalente*: $(p \equiv p) \equiv \mathit{True}$

b) *Doble negación*: $\neg\neg p \equiv p$

c) *Equivalencia y negación*: $p \equiv False \equiv \neg p$

d) *Neutro de la discrepancia*: $(p \not\equiv false) \equiv p$

e) *Absurdo*: $p \Rightarrow False \equiv \neg p$.

7. Decidí si son válidas o no las siguientes fórmulas. Justificá apropiadamente.

   a) $p \equiv p \equiv p \equiv True$

   b) $((p \not\equiv q) \equiv r) \equiv (p \not\equiv (q \equiv r))$

   c) $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

   d) $\neg p \equiv False$

   e) $\neg(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

8. Inventá dos fórmulas que utilicen sólo $\equiv$, $\not\equiv$ y $\neg$ una válida (teorema) y una no válida.

9. En la tabla de Axiomas y Teoremas básicos, se enuncia el metateorema de *True*, que dice, si P es un teorema entonces $P \equiv True$ es un teorema. ¿Qué es un metateorema?¿Para qué sirve este metateorema?

10. Demostrá por inducción el siguiente metateorema: $\underbrace{P \equiv P \equiv \ldots \equiv P}_{n \text{ veces}}$ es equivalente a *True* si n es par.

Disyunción y Conjunción

11. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado.

    a) *Distributividad de la disyunción con la disyunción*: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

    b) *Elemento absorbente de la disyunción*: $p \vee True \equiv True$

    c) *Elemento neutro de la disyunción*: $p \vee False \equiv p$

    d) *Teorema Estrella* : $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$

12. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado. **Aclaración:** Desde ahora en adelante, en cada ejercicio se pueden utilizar los teoremas ya demostrados en los ejercicios anteriores.

    a) *Distributividad de la disyunción con la conjunción*: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

    b) *De Morgan para la disyunción*: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

    c) *Asociatividad de la conjunción*: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

    d) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$

    e) *Conmutatividad de la conjunción*: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

    f) *Elemento absorbente de la conjunción*: $p \wedge False \equiv False$

    g) *Elemento neutro de la conjunción*: $p \wedge True \equiv p$

    h) *De Morgan para la conjunción*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg p$

    i) *Ley de absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

    j) *Ley de absorción (bis)*: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

13. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo, según corresponda.

    a) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r)$

    b) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv p$

    c) $p \wedge (q \equiv r \equiv s) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv (p \wedge s)$

    d) $\big(a \vee b \vee c \equiv a \vee b \equiv a \vee c \equiv b \vee c \equiv False\big) \equiv \big((a \equiv b \equiv c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)\big)$

Implicación

La implicación es uno de los mecanismos más intuitivos para razonar, ya que de esta forma representamos la **causalidad**. *De la misma forma que la causalidad no es simétrica, tampoco lo es la implicación. Es decir, los dos elementos que componen una implicación no participan de igual forma en la relación. Por ejemplo, cuando como demasiado (causa) me duele la panza (efecto), pero no a la inversa (cuando me duele la panza no necesariamente es porque he comido demasiado, puede ser porque estoy nervioso). El elemento a la izquierda de la implicación se llama* **antecedente**, *y el de la derecha,* **consecuente**. *Esta asimetría también se pone de manifiesto en la tabla de verdad de la implicación:*

p	q	$p \Rightarrow q$
True	*True*	*True*
True	*False*	*False*
False	*True*	*True*
False	*False*	*True*

También las diferentes formas de reescribir la implicación nos muestran como sus dos elementos participan de forma bien distinta en la relación. En el próximo ejercicio tienen las dos definiciones más comunes de implicación, vean cómo el antecedente y el consecuente tienen reescrituras bien distintas.

14. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado.

    a) *Caracterización de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
    b) *Definición dual de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \equiv p$
    c) *Negación de una implicación*: $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
    d) *Absurdo*: $p \Rightarrow \mathit{False} \equiv \neg p$.
    e) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.
    f) *Debilitamiento para* $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.
    g) *Modus Ponens* $(p \Rightarrow q) \wedge p \equiv p \wedge q$.
    h) *Modus Tollens* $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$.

15. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. Justificá apropiadamente.

    a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
    b) $p \vee (p \Rightarrow q) \equiv \mathit{True}$.
    c) $p \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p$.
    d) $p \vee q \Rightarrow q$.
    e) $p \wedge q \Rightarrow q$.
    f) $p \Rightarrow p \vee q$.
    g) $p \Rightarrow p \wedge q$.
    h) $\mathit{False} \Rightarrow p \equiv p$.
    i) $\mathit{False} \Rightarrow p \equiv \mathit{True}$.
    j) $\mathit{True} \Rightarrow p \equiv p$.
    k) $\mathit{True} \Rightarrow p \equiv \mathit{True}$.
    l) $p \vee (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$.
    m) $(p \Rightarrow p') \wedge (p \equiv q) \Rightarrow (p' \equiv q)$.
    n) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow \neg q \vee r)$.

16. **Ejercicios Extra:** Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado.

    a) *Currificación*: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.
    b) *Contrarrecíproca*: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.
    c) *Distributividad a izquierda de* $\Rightarrow$ *con* $\equiv$: $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow r$.
    d) *Doble implicación*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \equiv q$.
    e) *Transitividad*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
    f) *Monotonía conjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$.
    g) *Monotonía disjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$.

Debilitamiento

Se llama debilitamiento a un tipo de razonamiento mediante teoremas con implicación, donde el antecedente contiene más información que el consecuente. Otra forma de interpretarlo sería que el consecuente se ***deduce*** *del antecedente. Estos teoremas resultan muy intuitivos porque plasman razonamientos que usamos de forma habitual. Por ejemplo:*

> $p \wedge q \Rightarrow p$
> *p := hay clases de introducción a los algoritmos.*
> *q := hoy es jueves.*
> *"Es cierto que que hay clases de introducción a los algoritmos y que hoy es jueves ,*
> *por lo tanto, es cierto que hay clases de introducción a los algoritmos."*

Observar que la recíproca ($p \Rightarrow p \wedge q$) no se cumple, ya que no siempre que es cierto que si hay clases de introducción a los algoritmos entonces se cumple que hay clases de introducción a los algoritmos y que es jueves.

A la hora de demostrar un teorema de la forma $P \equiv Q$, acostumbramos a hacerlo de dos maneras posibles:

$$\begin{array}{ll}
 & P \equiv Q \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_1\ \} \\
 & P_1 \equiv Q_1 \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_2\ \} \\
 & P_2 \equiv Q_2 \\
 & \vdots \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_n\ \} \\
 & P_n \equiv Q_n \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_{n+1}\ \} \\
 & \textit{True}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
 & P \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_1\ \} \\
 & P_1 \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_2\ \} \\
 & P_2 \\
 & \vdots \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_n\ \} \\
 & P_n \\
\equiv & \{\ \textit{Razón}_{n+1}\ \} \\
 & Q
\end{array}$$

Una forma de interpretar la segunda forma es apelando a la transitividad de la equivalencia ($\equiv$): la fórmula $P \equiv P_1$ se cumple por la Razón$_1$ y $P_1 \equiv P_2$ por la Razón$_2$, por lo tanto vale $P \equiv P_2$. Pero sabemos además que $P_2 \equiv P_3$ justificado por la Razón$_3$, luego nuevamente por transitividad obtenemos que $P \equiv P_3$. Podemos aplicar sucesivamente este razonamiento hasta demostrar que $P \equiv Q$.

Ahora, ¿qué sucede cuando tenemos que demostrar una fórmula de la forma $P \Rightarrow Q$? En este caso también podemos aprovechar la transitividad de la implicación ($\Rightarrow$) junto con la de la equivalencia ($\equiv$). En este tipo de demostraciones podemos justificar ciertos pasos utilizando teoremas que involucren $\Rightarrow$, por ejemplo debilitamiento de $\wedge$, modus ponens, modus tollens, y otros que demostremos para una situación particular. Por ejemplo, Modus Ponens ($(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$) puede demostrarse de la siguiente manera

$$\begin{array}{ll}
 & (\underline{p \Rightarrow q}) \wedge p \\
\equiv & \{\ \textit{Caracterización de} \Rightarrow\ \} \\
 & \underline{(\neg p \vee q) \wedge p} \\
\equiv & \{\ \textit{Distributividad del} \wedge \textit{con el} \vee\ \} \\
 & (\underline{\neg p \wedge p}) \vee (q \wedge p) \\
\equiv & \{\ \textit{Contradicción}\ \} \\
 & \underline{\textit{False}} \vee (q \wedge p) \\
\equiv & \{\ \textit{Neutro de} \vee\ \} \\
 & q \wedge p \\
\Rightarrow & \{\ \textit{Debilitamiento de} \wedge\ \} \\
 & q
\end{array}$$

¡Pero atención! Cuando trabajamos con equivalente podemos reemplazar cualquier ***subexpresión*** *por alguna equivalente (Leibniz), pero para debilitar no ocurre lo mismo:* ***no se puede reemplazar siempre subexpresiones por otras más débiles****. Veamos un ejemplo de una demostración donde se comete ese error*

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{\neg p} \\
\Rightarrow & \{ \text{ Debilitamiento para Disyunción } (p \Rightarrow p \vee q) \ \} \\
 & \underline{\neg(p \vee r)} \\
\equiv & \{ \text{ De Morgan } \} \\
 & \neg p \wedge \neg r
\end{array}
$$

*En este ejemplo supuestamente demostramos $\neg p \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$, pero claramente esta fórmula no es válida (como ejercicio buscá un contraejemplo). Intuitivamente lo que está pasando es que estamos **fortaleciendo**, es decir, agregando más información, y no debilitando que sería lo que indica la implicación. ¿ Dónde está el error? El error está en sustituir una subexpresión por otra más débil asumiendo que funcionaría igual que en el caso de la equivalencia.*

***¿Cómo hacer para transformar las expresiones correctamente?** Por el momento vamos a trabajar con tres reglas*

I.- *Reemplazar toda la expresión por otra más débil utilizando algún axioma o teorema. Por ejemplo*

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \wedge q \wedge r} \\
\Rightarrow & \{ \text{ Debilitamiento de } \wedge \ (p, q := p \wedge q, r) \ \} \\
 & p \wedge q
\end{array}
$$

II.- *Si **toda** la expresión tiene la forma $P \vee Q$ se puede debilitar Q haciendo uso de la monotonía de la la implicación con la disyunción. Por ejemplo*

$$
\begin{array}{ll}
 & (\underline{q \wedge r}) \vee p \\
\Rightarrow & \{ \text{ Monotonía de } \Rightarrow \text{ con } \vee \text{ y Debilitamiento de } \wedge \ (p, q := q, r) \ \} \\
 & q \vee p
\end{array}
$$

Podemos interpretar este paso de la siguiente manera: por debilitamiento de la conjunción vale que $q \wedge r \Rightarrow q$, como la disyunción es monótona con la implicación $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r))$ puedo agregarle una disyunción en ambos lados del implica y la implicación seguirá valiendo ($(q \wedge r) \vee p \Rightarrow q \vee p)$

III.- *De manera análoga al anterior, si **toda** la expresión tiene la forma $P \wedge Q$ se puede debilitar Q haciendo uso de la monotonía de la la implicación con la conjunción. Por ejemplo*

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p} \wedge q \\
\Rightarrow & \{ \text{ Monotonía de } \Rightarrow \text{ con } \wedge \text{ y teorema ejercicio } (p \Rightarrow True) \ (p := q) \ \} \\
 & p \wedge True
\end{array}
$$

En las demostraciones en que usemos teoremas con equivalencia, habrá que conservar en todo momento la relación entre antecedente y consecuente. Podremos usar un teorema con implicación para llegar del antecedente al consecuente, pero **nunca del consecuente al antecedente**.

Tampoco podremos usar un teorema con implicación para probar la equivalencia de dos expresiones, como se sigue de la diferencia entre la tabla de verdad de una y otra. Dos expresiones son equivalentes cuando la primera implica a la segunda y la segunda a la primera, como se sigue del teorema de doble implicación que ya han demostrado en el ejercicio anterior.

17. Demostrá que las siguientes fórmulas de debilitamiento son teoremas, justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado. Cuando debilites indicá explicitamente la regla utilizada I, II ó III.

    a) *False* $\Rightarrow p$.
    b) $p \Rightarrow$ *True*.
    c) *Modus ponens*: $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.
    d) *Modus tollens*: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.
    e) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.
    f) *Debilitamiento para* $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.

18. ¿Es correcto este paso de demostración? Justifique con una demostración o un contraejemplo según corresponda.

$$\begin{array}{ll} & \underline{p \wedge q} \equiv q \\ \Rightarrow & \{ \text{ Monotonía de } \Rightarrow \text{ con } \equiv \text{ y debilitamiento de } \wedge \ \} \\ & p \equiv q \end{array}$$

19. ¿Es correcto este paso de demostración? Justifique con una demostración o un contraejemplo según corresponda.

$$\begin{array}{ll} & \neg(\underline{p \wedge q}) \\ \Rightarrow & \{ \text{ Monotonía de } \Rightarrow \text{ con } \neg \text{ y debilitamiento de } \wedge \ \} \\ & \neg p \end{array}$$

20. ¿Qué ocurre con la implicación? Si tengo una fórmula de la forma $P \Rightarrow Q$, ¿Se puede debilitar P?¿y Q? Justifique con una demostración o un contraejemplo según corresponda.

21. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo, según corresponda.

    a) $(p \Rightarrow q \wedge r) \wedge p \Rightarrow r$
    b) $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$
    c) $(i \Rightarrow s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$
    d) $((p \wedge \neg l) \Rightarrow i) \Rightarrow (i \Rightarrow p)$

Aplicaciones del Cálculo Proposicional

Además de ser una herramienta poderosa para probar que una fórmula es válida o que un programa es correcto, el Cálculo Proposicional puede utilizarse también para resolver acertijos o determinar si un razonamiento es válido. La ventaja de usar el Cálculo Proposicional en vez de tablas de verdad, es que éste aporta soluciones más elegantes y permite manipular fórmulas que involucren muchas variables.

El ***análisis de razonamientos lógicos*** *busca determinar si un enunciado en lenguaje natural es válido o no. Para ello, es necesario identificar proposiciones atómicas y operadores involucrados para convertirlos en proposiciones, algunas de las cuales serán premisas (o hipótesis)* P_1, P_2, ..., P_n *y una de ellas (la última) será la conclusión* C. *Para demostrar que el razonamiento es válido se construye una prueba de* $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow C$ *o si el razonamiento no es válido se da un contraejemplo asignando un valor de verdad a cada variable proposicional.*

Una tarea muy importante en el desarrollo de software es el modelado de problemas. *Cuando nos encontramos con un problema a resolver la primera tarea que se plantea es cómo expresar este problema ordenadamente para trabajar con rigor en su solución. En el tipo de ejercicio mencionado arriba se trabaja formalizando razonamientos lógicos sobre el cálculo proposicional. La idea principal consiste en modelar oraciones del lenguaje natural en términos proposicionales. La formalización de lenguaje natural puede resultar ambigua. A continuación se listan posibles traducciones de conectores del lenguaje natural a operadores lógicos, aunque no siempre son las apropiadas y dependen del contexto.*

$\neg$	*"No –", "Es falso que –", "No es el caso que –", etc.*
$\wedge$	*"– y –", "–, pero –", "–, sin embargo –",*
$\vee$	*"– o –", "– o – o ambos –".*
$\Rightarrow$	*"[Si] – entonces –", "– luego –", "–. Como consecuencia, –"*
$\equiv$	*"– si y sólo si –", "Son equivalentes – y –".*
$\not\equiv$	*"O bien – o –".*

22. Formalizá los siguientes razonamientos en el cálculo proposicional decidí si es correcto o no. Justificá con una demostración o un contraejemplo según corresponda.

    Veamos un ejemplo en que demostramos que un razonamiento es válido:

    Enunciado: Si el gobernador quiere mejorar su imagen, o mejora su política social o gasta más en publicidad. El gobernador no mejora su política social. Luego, si el gobernador quiere mejorar su imagen, entonces deberá gastar más en publicidad.

    Solución: Si utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

$$\begin{aligned} i &\doteq \text{el gobernador quiere mejorar su imagen} \\ s &\doteq \text{el gobernador mejora su política social} \\ p &\doteq \text{el gobernador gasta más en publicidad} \end{aligned}$$

podemos especificar la primer sentencia con la fórmula $i \Rightarrow s \lor p$, la segunda con $\neg s$, y la tercera con $i \Rightarrow p$. La primera y segunda sentencias son las *hipótesis del razonamiento*, y la final la *conclusión*. Un razonamiento de este tipo es correcto cuando la conjunción de las hipótesis $P_1, P_2, \ldots, P_n$ implica la conclusión C, es decir cuando la siguiente fórmula es válida:

$$P_1 \land P_2 \land \ldots \land P_n \Rightarrow C$$

En nuestro ejemplo, el razonamiento completo se puede formalizar como:

$$(i \Rightarrow s \lor p) \land \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$$

A continuación demostramos que este razonamiento es válido, es decir, que su formula es válida. Notá que un razonamiento de este estilo incluye siempre un operador $\Rightarrow$ y posiblemente varios $\land$. Suele ser útil entonces utilizar el teorema de "Caracterización de implicación" y el teorema de "Debilitamiento para $\land$").

$$\begin{aligned}
& (\underline{i \Rightarrow s \lor p}) \land \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& \underline{(\neg i \lor s \lor p) \land \neg s} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Conmutatividad y Asociatividad de } \lor \} \\
& \underline{((\neg i \lor p) \lor s) \land \neg s} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Distributividad de } \land \text{ con } \lor \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor (\underline{s} \land \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Doble negación } \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor \underline{(\neg\neg s \land \neg s)} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ De Morgan } \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor \neg(\underline{\neg s \lor s}) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Tercero excluido } \} \\
& ((\neg i \lor p) \land \neg s) \lor \neg(\mathit{True}) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Definición de } \mathit{False}\text{, Neutro de } \lor \} \\
& ((\underline{\neg i \lor p}) \land \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& (i \Rightarrow p) \land \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Debilitamiento para } \land \} \\
& (i \Rightarrow p) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ p} \Rightarrow \text{p } \} \\
& \mathit{True}
\end{aligned}$$

Veamos ahora un ejemplo de un razonamiento no válido. Mostraremos su invalidez mediante un contraejemplo.

Enunciado: Si llega la primavera y no llueve, el riesgo de incendios es muy alto. El riesgo de incendios es muy alto, por lo tanto ha llegado la primavera.

Solución: Utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

$$p \doteq \text{llega la primavera}$$
$$l \doteq \text{llueve}$$
$$i \doteq \text{el riesgo de incendios es muy alto}$$

podemos especificar la primer sentencia (la hipótesis) con la fórmula $p \wedge \neg l \Rightarrow i$ y la segunda (la conclusión) con $i \Rightarrow p$. Podemos mostrar que este razonamiento es incorrecto si encontramos una asignación de valores de verdad a las variables de forma tal que la expresión $((p \wedge \neg l) \Rightarrow i) \Rightarrow (i \Rightarrow p)$ sea falsa. Como se trata de una implicación, la expresión solamente será falsa si el antecedente (la hipótesis) es verdadero y el consecuente (la conclusión) es falso. Para este caso, la expresión resulta falsa si

$$p \doteq false$$
$$i \doteq true$$

y para cualquier valor de l.

a) Si hago mucho deporte estoy cansado. No estoy cansado, por lo tanto no hago mucho deporte.

b) Si hago mucho deporte estoy cansado. Estoy cansado, por lo tanto hago mucho deporte.

c) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Es el caso que llueve y no tengo paraguas, por lo tanto, me mojo y me resfrío.

d) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. No me mojo y me resfrío, por lo tanto, si llueve, tengo paraguas.

e) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Me mojo y me resfrío, por lo tanto, si llueve, no tengo paraguas.

f) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes y llueve, tenemos clase y llueve.

g) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes y llueve, tenemos clase.

h) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes, o tenemos clase o llueve.

i) Si el gobernador quiere mejorar su imagen entonces mejora su política social. El gobernador no mejora su política social por lo tanto no quiere mejorar su imagen.

j) Si el presidente entiende las protestas de la gente entonces si quiere ser reelegido cambiará su política. El presidente quiere ser reelegido. Luego, si el presidente entiende las protestas de la gente, entonces cambiará su política.

k) Si la ciudadanía romana hubiera sido una garantía de los derechos civiles, los romanos habrían gozado de libertad religiosa. Si los romanos hubieran gozado de libertad religiosa, entonces no se habría perseguido a los primeros cristianos. Pero los primeros cristianos fueron perseguidos. Por consiguiente, la ciudadanía romana no puede haber sido una garantía de los derechos civiles.

23. Suponiendo $n \geqslant 0$, demostrá por inducción las siguientes propiedades de $+\!\!+$ con . y $\uparrow$:

a) $(xs +\!\!+ ys).n = (n < \#xs \to xs.n$
$\qquad\qquad\qquad\quad \Box n \geqslant \#xs \to ys.(n - \#xs)$
$\qquad\qquad\qquad\quad)$

b) $(xs +\!\!+ ys) \uparrow n = (n < \#xs \to xs \uparrow n$
$\qquad\qquad\qquad\quad \Box n \geqslant \#xs \to xs +\!\!+ (ys \uparrow (n - \#xs))$
$\qquad\qquad\qquad\quad)$

Ayuda: Para el ítem *a*) debés demostrar por inducción (doble!) la validez de las siguientes fórmulas:

i) $n \geqslant 0 \wedge n < \#xs \Rightarrow (xs +\!\!+ ys).n = xs.n$

ii) $n \geqslant 0 \wedge n \geqslant \#xs \Rightarrow (xs +\!\!+ ys).n = ys.(n - \#xs)$

24. Encontrá la propiedad análoga a la del ejercicio anterior, ítem *b*) respecto a $\downarrow$ y demostrala.