

Introducción a los Algoritmos - 2do. cuatrimestre 2011

Guía 4: Cálculo Proposicional y Aplicaciones

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso Alemani, Walter Alini, Luciana Benotti, Ezequiel Orbe

El objetivo principal de esta guía es lograr un buen entrenamiento de las habilidades necesarias para realizar una demostración formal en un sistema lógico sencillo, el Cálculo Proposicional. Además, trabajaremos sobre una aplicación muy sencilla que nos ayude a comprender su utilidad y potencialidad.

Especificaciones con Expresiones Proposicionales

1. Representá con una fórmula de lógica proposicional los siguientes enunciados. Usá el símbolo de predicado p para representar $(a < b)$, usá q para representar $(b < c)$, y r para $(a < c)$.
 - a) $a < b < c$
 - b) Si $a < b$ entonces no es el caso que $(a \geq c)$.
 - c) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $(a \geq c)$
 - d) No es el caso que $(a < b$ y $a < c)$
 - e) (No es el caso que $(a < b$ y $(a < c$ ó $b < c))$) ó $(a \geq b$ y $a < c)$
2. Escribí una fórmula proposicional para cada una de las siguientes frases, utilizando una variable proposicional para cada sentencia atómica, aclarando siempre el significado escogido para cada variable. A veces es conveniente reescribir las frases para hacer mas claro su sentido. Por ejemplo, la frase

Hoy es martes o jueves

puede pensarse como dos oraciones unidas por una disyunción, pudiendo reescribirse como:

Hoy es martes **u** hoy es jueves

Entonces podemos formalizarla con la fórmula $p \vee q$, utilizando p para la primer sentencia y q para la segunda, es decir, definiendo:

$$\begin{aligned} p &\doteq \text{ hoy es martes} \\ q &\doteq \text{ hoy es jueves} \end{aligned}$$

En lo posible utilizá un mismo símbolo de proposición para la misma sentencia atómica a lo largo de todo el ejercicio, para poder comparar las fórmulas.

- a) Hoy es martes y hay sol.
- b) Hoy es martes y no hay sol.
- c) Hoy no es ni miércoles ni viernes.
- d) Mañana, llueve o no llueve.
- e) Mañana será jueves y no será jueves.
- f) Hoy es viernes, pero tengo clases de Algoritmos.
- g) Yo no voy de vacaciones y Juan y Pedro tampoco.
- h) Juan vendrá a clase, y seguro que vendrán también María o Pedro.
- i) Si no tienes menos de 18 años ni tienes antecedentes puedes irte a vivir a otro país.
- j) No es verdad que si tienes menos de 16 años y consentimiento paterno te puedas casar.

Cálculo Proposicional

Una demostración en el Cálculo Proposicional que veremos en este curso consiste en probar la **validez** de una fórmula mediante una serie de pasos justificados con **axiomas** y **teoremas** del Cálculo. Recordemos que una fórmula es válida si para toda asignación posible de las variables es equivalente a *True*; por lo tanto una demostración será una serie de fórmulas, equivalentes entre sí, donde la primera fórmula es la que queremos demostrar válida y la última es *True*. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll}
 P & (x > 0) \vee (x \leq 0) \\
 \equiv \{ \text{Razón 1} \} & \equiv \{ \text{Aritmética} \} \\
 Q & (x > 0) \vee \neg(x > 0) \\
 \equiv \{ \text{Razón 2} \} & \equiv \{ \text{Tercero excluido } (p \vee \neg p) \} \\
 \text{True} & \text{True}
 \end{array}$$

El ejemplo general de la izquierda, donde se quiere demostrar que la fórmula P es válida, se puede leer de la siguiente manera: Debido a la **Razón 1** P es equivalente a Q y debido a la **Razón 2** Q es equivalente a *True*. Por lo tanto, como el equivalente es transitivo, se concluye que P es equivalente a *True*. Por supuesto que este ejemplo de dos pasos se puede generalizar a cualquier cantidad necesaria de pasos.

Un caso particular, pero muy utilizado, es cuando la fórmula que se quiere demostrar es de la forma $P \equiv Q$; por ejemplo, $p \vee q \equiv q \vee p$. Para demostrar la validez de la fórmula podemos seguir la estrategia planteada anteriormente transformando la expresión completa en *True*, o bien partir de la subexpresión P y transformarla en la subexpresión Q (o viceversa). En ambos casos, cada paso de “transformación” consiste en “reescribir” la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos.

Cada axioma o teorema nos habilita a reescribir una expresión de diversas maneras. Por ejemplo la Regla Dorada, cuya formulación es $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$, nos permite reescribir la expresión $P \wedge Q$ por $P \equiv Q \equiv P \vee Q$, pero también:

$$\begin{array}{ll}
 P \wedge Q \equiv P & \text{por } Q \equiv P \vee Q \\
 Q \equiv P \vee Q & \text{por } P \wedge Q \equiv P \\
 P \wedge Q \equiv P \vee Q & \text{por } P \equiv Q \\
 P \wedge Q \equiv Q \equiv P \vee Q & \text{por } Q \\
 P \equiv P \vee Q & \text{por } P \wedge Q \equiv Q \\
 \text{etc } \dots &
 \end{array}$$

Notá además que el lugar de las variables P, Q y R en un axioma o teorema puede ser ocupado por cualquier expresión booleana (de tipo *Bool*), ya sean variables proposicionales, como $p, p \wedge q, p \Rightarrow q \vee r$, etc, o fórmulas más concretas como $2 * 2 = 4, x \leq 0$, etc.

Sustitución y Regla de Leibniz

Dos herramientas muy importantes en el Cálculo Proposicional son la sustitución y la regla de Leibniz.

Leibniz introdujo la propiedad de que es posible sustituir en una fórmula algunos elementos por otros que satisfacen el predicado de igualdad con ellos, es decir, iguales a éstos que se están reemplazando, sin que esto altere el significado de la expresión. Una idea intuitiva de esta regla se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = 5 & (1) \\ y = x + 3 & (2) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Utilizo (1) en (2)}} \left\{ \begin{array}{ll} x = 5 & (1) \\ y = 5 + 3 & (2) \end{array} \right.$$

En este ejemplo, ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes.

En las demostraciones del Cálculo se utiliza todo el tiempo la regla de Leibniz para “transformar” fórmulas. Por ejemplo, si se cumple $p \vee p \equiv p$, se puede transformar la fórmula $p \wedge q$ a la fórmula $(p \vee p) \wedge q$ donde se reemplazó p por otra expresión equivalente, $p \vee p$.

Combinando sustitución con la regla de Leibniz se puede obtener transformaciones más interesantes. Por ejemplo, si se cumple $p \vee p \equiv p$ y a esta expresión se le realiza la sustitución ($p := x > 0$) se obtiene una nueva fórmula ($x > 0 \vee x > 0 \equiv x > 0$). Esta nueva fórmula se puede utilizar para “transformar” otra expresión.

Observar que en ambos casos se utilizó la expresión condicional “si se cumple” por lo que hay que ser cuidadoso en dónde se aplica. Una regla que se puede utilizar en esta materia para no cometer errores es asegurarse que la fórmula sea válida, específicamente, que sea un axioma o teorema.

3. Encontrá las dos expresiones equivalentes entre sí, que fueron utilizadas para transformar la primera expresión en la última y escribirla entre las llaves. Comprabá si corresponde a algún axioma o teorema enumerado en el digesto de axiomas y teoremas. Subrayá la expresión que está siendo reemplazada e la primer fórmula.

Por ejemplo,

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} q \equiv p \\ q \equiv p \vee p \end{array} \right\}$$

se puede observar que la equivalencia utilizada es $p \vee p \equiv p$ que se llama idempotencia de la disyunción. Como reemplazamos p la subrayamos.

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} q \equiv p \\ \text{Idempotencia de la disyunción } (p \vee p \equiv p) \\ q \equiv p \vee p \end{array} \right\}$$

$$a) \quad \equiv \left\{ \begin{array}{l} p \\ p \equiv \text{True} \end{array} \right\}$$

$$c) \quad \equiv \left\{ \begin{array}{l} p \vee (q \equiv r) \\ p \vee q \equiv p \vee r \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \equiv \left\{ \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ (p \equiv \text{True}) \Rightarrow q \end{array} \right\}$$

$$d) \quad \equiv \left\{ \begin{array}{l} q \Rightarrow p \vee q \\ q \Rightarrow (p \equiv q \equiv p \wedge q) \end{array} \right\}$$

4. Encontrá las incógnitas \mathcal{E} , \mathcal{F} y \mathcal{G} de forma que la sustitución $(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ justifique cómo fue aplicado cada axioma o teorema para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones. En todos los casos enunciá la fórmula cuya validez se demuestra. Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \\ \text{(Definición de negación)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \\ \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array} \right\}$$

demuestra la validez de la fórmula:
utilizando el axioma “Definición de negación”:
con la sustitución

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q \equiv p) &\equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \\ \neg(P \equiv Q) &\equiv \neg P \equiv Q. \\ P, Q &:= (p \Rightarrow q), p \end{aligned}$$

Viéndolo de otro modo, ¿qué sucede si aplicamos la sustitución $(P, Q := (p \Rightarrow q), p)$ al axioma “Definición de negación”?:

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} (\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q)(P, Q := (p \Rightarrow q), p) \\ \text{Definición de sustitución} \\ \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array} \right\}$$

Obtenemos exactamente la fórmula a demostrar, lo que verifica que efectivamente $\mathcal{E} \doteq p \Rightarrow q$ y $\mathcal{F} \doteq p$ es una solución.

Para encontrar la sustitución no existe un método preciso. Podemos pensar en las variables P, Q y R de los axiomas como “comodines” diferentes, cada uno de los cuales puede representar una fórmula cualquiera (tan grande como queramos), pero de manera coherente: el lugar de un comodín es ocupado siempre por la **misma** fórmula. Una vez que tenemos la fórmula cuya validez es demostrada por el paso deductivo, la ubicación de los paréntesis y de los operadores ayuda a encontrar la sustitución utilizada. A continuación la primera es la fórmula a demostrar, y la segunda el axioma visto con “comodines”:

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q \equiv p) &\equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \\ \neg(\diamond \equiv \clubsuit) &\equiv \neg \diamond \equiv \clubsuit \end{aligned}$$

Claramente el lugar de \diamond lo ocupa $p \Rightarrow q$, y el lugar de \clubsuit , la variable p .

Aclaración: Consultar la fórmula correspondiente a cada axioma o teorema en el digesto de axiomas y teoremas.

- | | |
|--|--|
| <p>a) $p \equiv q \equiv r$
 $\equiv \{ \text{(Commutatividad de } \equiv)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \}$
 $r \equiv p \equiv q$</p> | <p>d) $n \text{ mód } 4 = 0 \Rightarrow n \text{ mód } 2 = 0$
 $\equiv \{ \text{(Definición de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \}$
 $n \text{ mód } 4 = 0 \vee n \text{ mód } 2 = 0 \equiv n \text{ mód } 2 = 0$</p> |
| <p>b) $p \vee q \vee (\text{False} \equiv \neg q)$
 $\equiv \{ \text{(Distributividad } \vee \text{ con } \equiv)(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \}$
 $p \vee q \vee \text{False} \equiv p \vee q \vee \neg q$</p> | <p>e) $x > 2 \vee y > 5 \equiv x > 2 \vee \neg y > 5$
 $\equiv \{ \text{(Teorema *)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \}$
 $x > 2$</p> |
| <p>c) $\neg p \wedge (r \Rightarrow s)$
 $\equiv \{ \text{(Regla dorada)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \}$
 $\neg p \equiv r \Rightarrow s \equiv \neg p \vee (r \Rightarrow s)$</p> | <p>f) $\neg(p \wedge q \wedge r \Rightarrow p \wedge s)$
 $\equiv \{ \text{(Negación de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \}$
 $p \wedge q \wedge r \wedge \neg(p \wedge s)$</p> |

5. Completá las siguientes demostraciones especificando el axioma o teorema utilizado y la sustitución correspondiente; subrayá la subexpresión donde se aplica.

- | | | | |
|---|--|---|---|
| <p>a) $\neg\neg\neg p \equiv q$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $\neg p \equiv q$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $\neg(p \equiv q)$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $p \neq q$</p> | <p>b) $p \vee (q \equiv r \equiv s)$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $p \vee (q \equiv r) \equiv p \vee s$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $p \vee q \equiv p \vee r \equiv p \vee s$</p> | <p>c) $p \Rightarrow q$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $p \vee q \equiv q$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $q \equiv p \vee q$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $p \wedge q \equiv p$</p> | <p>d) $\neg p \equiv \neg q$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $\neg(p \equiv \neg q)$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $\neg(\neg q \equiv p)$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $\neg\neg(q \equiv p)$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $\neg\neg(p \equiv q)$
 $\equiv \{ \quad \}$
 $p \equiv q$</p> |
|---|--|---|---|

Equivalencia, Discrepancia y Negación

6. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas *válidas*. Realizá la demostración con máximo nivel de detalle, esto es, justificando cada paso con un axioma y la sustitución utilizada en el mismo. Como ejemplo demostramos la *Asociatividad de la discrepancia*: $(p \neq (q \neq r)) \equiv ((p \neq q) \neq r)$, partiendo de la parte izquierda:

$$\begin{aligned}
 & (p \neq (q \neq r)) \\
 \equiv & \{ \text{(Definición de } \neq)(Q := (q \neq r)) \} \\
 & \neg(p \equiv (q \neq r)) \\
 \equiv & \{ \text{(Definición de } \neq)(P, Q := q, r) \} \\
 & \neg(p \equiv \neg(q \equiv r)) \\
 \equiv & \{ \text{(Definición de } \neg)(P, Q := q, r) \} \\
 & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\
 \equiv & \{ \text{(Definición de } \neq)(P, Q := (p \equiv \neg q), r) \} \\
 & \underline{(p \equiv \neg q) \neq r} \\
 \equiv & \{ \text{(Commutatividad de } \equiv)(Q := \neg q) \} \\
 & \underline{(\neg q \equiv p) \neq r} \\
 \equiv & \{ \text{(Definición de } \neg)(P, Q := q, p) \} \\
 & \neg(q \equiv p) \neq r \\
 \equiv & \{ \text{Commutatividad de } \equiv \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv q) \neq r} \\
 \equiv & \{ \text{Definición de } \neq \} \\
 & (p \neq q) \neq r
 \end{aligned}$$

a) Reflexividad del equivalente: $(p \equiv p) \equiv \text{True}$

b) Doble negación: $\neg\neg p \equiv p$

- c) *Equivalencia y negación*: $p \equiv \text{False} \equiv \neg p$
- d) *Neutro de la discrepancia*: $(p \neq \text{false}) \equiv p$
- e) *Absurdo*: $p \Rightarrow \text{False} \equiv \neg p$.

7. Decidí si son válidas o no las siguientes fórmulas. Justificá apropiadamente.

- a) $p \equiv p \equiv p \equiv \text{True}$
- b) $((p \neq q) \equiv r) \equiv (p \neq (q \equiv r))$
- c) $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
- d) $\neg p \equiv \text{False}$
- e) $\neg(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

8. Inventá dos fórmulas que utilicen sólo \equiv , \neq y \neg una válida (teorema) y una no válida.

9. En la tabla de Axiomas y Teoremas básicos, se enuncia el metateorema de *True*, que dice, si P es un teorema entonces $P \equiv \text{True}$ es un teorema. ¿Qué es un metateorema? ¿Para qué sirve este metateorema?

10. Demostrá por inducción el siguiente metateorema: $\underbrace{P \equiv P \equiv \dots \equiv P}_{n \text{ veces}}$ es equivalente a *True* si n es par.

Disyunción y Conjunción

11. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado.

- a) *Distributividad de la disyunción con la disyunción*: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$
- b) *Elemento absorbente de la disyunción*: $p \vee \text{True} \equiv \text{True}$
- c) *Elemento neutro de la disyunción*: $p \vee \text{False} \equiv p$
- d) *Teorema Estrella*: $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$

12. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado.

Aclaración: Desde ahora en adelante, en cada ejercicio se pueden utilizar los teoremas ya demostrados en los ejercicios anteriores.

- a) *Distributividad de la disyunción con la conjunción*: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- b) *De Morgan para la disyunción*: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- c) *Asociatividad de la conjunción*: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- d) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$
- e) *Conmutatividad de la conjunción*: $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- f) *Elemento absorbente de la conjunción*: $p \wedge \text{False} \equiv \text{False}$
- g) *Elemento neutro de la conjunción*: $p \wedge \text{True} \equiv p$
- h) *De Morgan para la conjunción*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- i) *Ley de absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- j) *Ley de absorción (bis)*: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

13. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo.

- a) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r)$
- b) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv p$
- c) $p \wedge (q \equiv r \equiv s) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv (p \wedge s)$
- d) $(a \vee b \vee c \equiv a \vee b \equiv a \vee c \equiv b \vee c \equiv \text{False}) \equiv ((a \equiv b \equiv c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c))$

Implicación

La implicación es uno de los mecanismos más intuitivos para razonar, ya que de esta forma representamos la **causalidad**. De la misma forma que la causalidad no es simétrica, tampoco lo es la implicación. Es decir, los dos elementos que componen una implicación no participan de igual forma en la relación. Por ejemplo, cuando como demasiado (causa) me duele la panza (efecto), pero no a la inversa (cuando me duele la panza no necesariamente es porque he comido demasiado, puede ser porque estoy nervioso). El elemento a la izquierda de la implicación se llama **antecedente**, y el de la derecha, **consecuente**. Esta asimetría también se pone de manifiesto en la tabla de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
True	True	True
True	False	False
False	True	True
False	False	True

También las diferentes formas de reescribir la implicación nos muestran como sus dos elementos participan de forma bien distinta en la relación. En el próximo ejercicio tienen las dos definiciones más comunes de implicación, vean cómo el antecedente y el consecuente tienen reescrituras bien distintas.

14. Demuestra que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado.

- a) Caracterización de implicación: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- b) Definición dual de implicación: $p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \equiv p$
- c) Negación de una implicación: $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
- d) Absurdo: $p \Rightarrow \text{False} \equiv \neg p$.
- e) Modus Ponens $(p \Rightarrow q) \wedge p \equiv p \wedge q$.
- f) Modus Tollens $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$.
- g) Contrarrecíproca: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

15. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. Justificá apropiadamente.

- a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- b) $p \vee (p \Rightarrow q) \equiv \text{True}$.
- c) $p \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p$.
- d) $p \vee q \Rightarrow q$.
- e) $p \wedge q \Rightarrow q$.
- f) $p \Rightarrow p \vee q$.
- g) $p \Rightarrow p \wedge q$.
- h) $\text{False} \Rightarrow p \equiv p$.
- i) $\text{False} \Rightarrow p \equiv \text{True}$.
- j) $\text{True} \Rightarrow p \equiv p$.
- k) $\text{True} \Rightarrow p \equiv \text{True}$.
- l) $p \vee (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$.
- m) $(p \Rightarrow p') \wedge (p \equiv q) \Rightarrow (p' \equiv q)$.
- n) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow \neg q \vee r)$.

16. **Ejercicios Extra:** Demuestra que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado.

- a) Currificación: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.
- b) Distributividad a izquierda de \Rightarrow con \equiv : $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow r$.
- c) Doble implicación: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \equiv q$.
- d) Monotonía conjunción: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$.
- e) Monotonía disjunción: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$.

Debilitamiento

Se llama debilitamiento a un tipo de razonamiento mediante teoremas con implicación, donde el antecedente contiene más información que el consecuente. Estos teoremas resultan muy intuitivos porque plasman razonamientos que usamos de forma habitual. Los casos más claros de debilitamiento son los debilitamientos de \wedge y de \vee , veamos un ejemplo del debilitamiento de \wedge :

$p \wedge q \Rightarrow p$
 $p :=$ hoy es jueves.
 $q :=$ me gustan los fideos.
“Es cierto que hoy es jueves y que me gustan los fideos,
por lo tanto, es cierto que me gustan los fideos.”

Pero mucha atención: el debilitamiento es un tipo de razonamiento donde **no se prueba la equivalencia** entre dos expresiones, sino que una implica la otra. Por lo tanto, el orden de la demostración no es indiferente (como sí lo es si usamos solamente teoremas de equivalencia). En una analogía con la aritmética, si usamos debilitamiento, el orden de los factores sí altera el producto.

Siguiendo con el ejemplo anterior, del teorema de debilitamiento del “y” no puedo probar la validez del siguiente razonamiento: “Es cierto que me gustan los fideos, por lo tanto, es cierto que hoy es jueves y que me gustan los fideos.”, ya que no siempre que es cierto que “me gustan los fideos” es también cierto que “hoy es jueves”.

En resumen, las demostraciones en que usemos teoremas con equivalencia, habrá que conservar en todo momento la relación entre antecedente y consecuente. Podremos usar un teorema con implicación para llegar del antecedente al consecuente, pero **nunca del consecuente al antecedente**.

Tampoco podremos usar un teorema con implicación para probar la equivalencia de dos expresiones, como se sigue de la diferencia entre la tabla de verdad de una y otra. Dos expresiones son equivalentes cuando la primera implica a la segunda y la segunda a la primera, como se sigue del teorema de doble implicación que ya han demostrado como último punto del ejercicio anterior.

17. Demostrá que las siguientes fórmulas de debilitamiento son teoremas, justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado. Por ejemplo, para probar $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, podemos usar varios de los teoremas con equivalencias que venimos usando y, además, un teorema de debilitamiento, el debilitamiento de \wedge , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & p \wedge (p \Rightarrow q) \\ \equiv & \{ \text{Caracterización de } \Rightarrow \} \\ & p \wedge (\neg p \vee q) \\ \equiv & \{ \text{Distributividad del } \wedge \text{ con el } \vee \} \\ & (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \\ \equiv & \{ \text{Contradicción} \} \\ & \text{False} \vee (p \wedge q) \\ \equiv & \{ \text{Neutro de } \vee \} \\ & p \wedge q \\ \Rightarrow & \{ \text{Debilitamiento de } \wedge \} \\ & q \end{aligned}$$

- Debilitamiento para \wedge : $p \wedge q \Rightarrow p$.
- Debilitamiento para \vee : $p \Rightarrow p \vee q$.
- Modus ponens: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.
- Modus tollens: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.
- Transitividad: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Aplicaciones del Cálculo Proposicional

Además de ser una herramienta poderosa para probar que una fórmula es válida o que un programa es correcto, el Cálculo Proposicional puede utilizarse también para resolver acertijos o determinar si un razonamiento es válido. La ventaja de usar el Cálculo Proposicional en vez de tablas de verdad, es que éste aporta soluciones más elegantes y permite manipular fórmulas que involucren muchas variables.

El **análisis de razonamientos lógicos** busca determinar si un enunciado en lenguaje natural es válido o no. Para ello, es necesario identificar proposiciones atómicas y operadores involucrados para convertirlos en proposiciones, algunas de las cuales serán premisas (o hipótesis) P_1, P_2, \dots, P_n y una de ellas (la última) será la conclusión C . Para demostrar que el razonamiento es válido se construye una prueba de $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$ o si el razonamiento no es válido se da un contraejemplo asignando un valor de verdad a cada variable proposicional. El ejercicio 14 propone resolver este tipo de razonamientos.

Una tarea muy importante en el desarrollo de software es el modelado de problemas. Cuando nos encontramos con un problema a resolver la primera tarea que se plantea es cómo expresar este problema ordenadamente para trabajar con rigor en su solución. En el tipo de ejercicio mencionado arriba se trabaja formalizando razonamientos lógicos sobre el cálculo proposicional. La idea principal consiste en modelar oraciones del lenguaje natural en términos proposicionales. En los siguientes ejercicios damos un paso más en la formalización trabajando con problemas cuyo modelado es más complejo.

Los ejercicios consisten en combinaciones del Cálculo Proposicional con temas que ya hemos visto anteriormente: definición de funciones recursivas, razonamiento sobre el operador máx, y demostraciones por inducción.

La formalización de lenguaje natural puede resultar ambigua. A continuación se listan posibles traducciones de conectores del lenguaje natural a operadores lógicos, aunque no siempre son las apropiadas y dependen del contexto.

\neg	“No –”, “Es falso que –”, “No es el caso que –”, etc.
\wedge	“– y –”, “–, pero –”, “–, sin embargo –”,
\vee	“– o –”, “– o – o ambos –”.
\Rightarrow	“[Si] – entonces –”, “– luego –”, “–. Como consecuencia, –”
\equiv	“– si y sólo si –”, “Son equivalentes – y –”.
\neq	“O bien – o –”.

8. Formalizá los siguientes razonamientos en el cálculo proposicional y demostrá su corrección o bien proporcioná un contraejemplo que muestre que no son válidos (es decir, una asignación de valores de verdad a las variables que haga falsa a la expresión). Veamos un ejemplo en que demostramos que un razonamiento es válido:

Enunciado: Si el gobernador quiere mejorar su imagen, o mejora su política social o gasta más en publicidad. El gobernador no mejora su política social. Luego, si el gobernador quiere mejorar su imagen, entonces deberá gastar más en publicidad.

Solución: Si utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

$i \doteq$ el gobernador quiere mejorar su imagen
 $s \doteq$ el gobernador mejora su política social
 $p \doteq$ el gobernador gasta más en publicidad

podemos especificar la primera sentencia con la fórmula $i \Rightarrow s \vee p$, la segunda con $\neg s$, y la tercera con $i \Rightarrow p$. La primera y segunda sentencias son las *hipótesis del razonamiento*, y la final la *conclusión*. Un razonamiento de este tipo es correcto cuando la conjunción de las hipótesis P_1, P_2, \dots, P_n implica la conclusión C , es decir cuando la siguiente fórmula es válida:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$$

En nuestro ejemplo, el razonamiento completo se puede formalizar como:

$$(i \Rightarrow s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$$

A continuación demostramos que este razonamiento es válido, es decir, que su fórmula es válida. Notá que un razonamiento de este estilo incluye siempre un operador \Rightarrow y posiblemente varios \wedge . Suele ser útil entonces utilizar el teorema de “Caracterización de implicación” y el teorema de “Debilitamiento para \wedge ” (ej. 14 ítem *a* y ej. 17 ítem *a*).

$$\begin{aligned}
& (i \Rightarrow s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& (\neg i \vee s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Commutatividad y Asociatividad de } \vee \} \\
& ((\neg i \vee p) \vee s) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Distributividad de } \wedge \text{ con } \vee \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee (s \wedge \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Doble negación} \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee (\neg \neg s \wedge \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{De Morgan} \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee \neg(\neg s \vee s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Tercero excluido} \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee \neg(\text{True}) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Definición de False, Neutro de } \vee \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& (i \Rightarrow p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ \text{Debilitamiento para } \wedge \} \\
& (i \Rightarrow p) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv & \{ p \Rightarrow p \} \\
& \text{True}
\end{aligned}$$

Veamos ahora un ejemplo de un razonamiento no válido. Mostraremos su invalidez mediante un contraejemplo.

Enunciado: Si llega la primavera y no llueve, el riesgo de incendios es muy alto. El riesgo de incendios es muy alto, por lo tanto ha llegado la primavera.

Solución: Utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

$$\begin{aligned}
p & \doteq \text{llega la primavera} \\
l & \doteq \text{llueve} \\
i & \doteq \text{el riesgo de incendios es muy alto}
\end{aligned}$$

podemos especificar la primera sentencia (la hipótesis) con la fórmula $p \wedge \neg l \Rightarrow i$ y la segunda (la conclusión) con $i \Rightarrow p$. Podemos mostrar que este razonamiento es incorrecto si encontramos una asignación de valores de verdad a las variables de forma tal que la expresión $((p \wedge \neg l) \Rightarrow i) \Rightarrow (i \Rightarrow p)$ sea falsa. Como se trata de una implicación, la expresión solamente será falsa si el antecedente (la hipótesis) es verdadero y el consecuente (la conclusión) es falso. Para este caso, la expresión resulta falsa si

$$\begin{aligned}
p & \doteq \text{false} \\
i & \doteq \text{true}
\end{aligned}$$

y para cualquier valor de l .

Ahora demostrará la corrección o proporcionará contraejemplos para mostrar la invalidez de los siguientes razonamientos. También podés tratar de ver si se trata de instancias de alguna de las fórmulas generales de debilitamiento vistas en el ejercicio 17.

- a) Si hago mucho deporte estoy cansado. No estoy cansado, por lo tanto no hago mucho deporte.
- b) Si hago mucho deporte estoy cansado. Estoy cansado, por lo tanto hago mucho deporte.
- c) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Es el caso que llueve y no tengo paraguas, por lo tanto, me mojo y me resfrío.
- d) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. No me mojo y me resfrío, por lo tanto, si llueve, tengo paraguas.

- e) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Me mojo y me resfrío, por lo tanto, si llueve, no tengo paraguas.
- f) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes y llueve, tenemos clase y llueve.
- g) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes y llueve, tenemos clase.
- h) Si mañana es martes, tenemos clase. Si mañana es martes, o tenemos clase o llueve.
- i) Si el gobernador quiere mejorar su imagen entonces mejora su política social. El gobernador no mejora su política social por lo tanto no quiere mejorar su imagen.
- j) Si el presidente entiende las protestas de la gente entonces si quiere ser reelegido cambiará su política. El presidente quiere ser reelegido. Luego, si el presidente entiende las protestas de la gente, entonces cambiará su política.
- k) Si la ciudadanía romana hubiera sido una garantía de los derechos civiles, los romanos habrían gozado de libertad religiosa. Si los romanos hubieran gozado de libertad religiosa, entonces no se habría perseguido a los primeros cristianos. Pero los primeros cristianos fueron perseguidos. Por consiguiente, la ciudadanía romana no puede haber sido una garantía de los derechos civiles.

9. Suponiendo $n \geq 0$, demostrará por inducción las siguientes propiedades de $\#$ con $.$ y \uparrow :

$$\begin{array}{ll}
 a) (xs \# ys).n = (n < \#xs \rightarrow xs.n & b) (xs \# ys) \uparrow n = (n < \#xs \rightarrow xs \uparrow n \\
 \quad \square n \geq \#xs \rightarrow ys.(n - \#xs) & \quad \square n \geq \#xs \rightarrow xs \# (ys \uparrow (n - \#xs)) \\
) &)
 \end{array}$$

Ayuda: Para el ítem *a*) debes demostrar por inducción (doble!) la validez de las siguientes fórmulas:

- i) $n \geq 0 \wedge n < \#xs \Rightarrow (xs \# ys).n = xs.n$
- ii) $n \geq 0 \wedge n \geq \#xs \Rightarrow (xs \# ys).n = ys.(n - \#xs)$

10. Encontrá la propiedad análoga a la del ejercicio anterior, ítem *b*) respecto a \downarrow y demostrala.

11. Demostrá por inducción que cuando n es par, la fórmula $\overbrace{p \equiv \dots \equiv p}^n$ es un teorema.