Introducción a los Algoritmos - 2do. cuatrimestre 2011

Guía 4: Cálculo Proposicional y Aplicaciones

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso Alemani, Walter Alini, Luciana Benotti, Ezequiel Orbe

El objetivo principal de esta guía es lograr un buen entrenamiento de las habilidades necesarias para realizar una demostración formal en un sistema lógico sencillo, el Cálculo Proposicional. *Además, trabajaremos sobre una aplicación muy sencilla que nos ayude a comprender su utilidad y potencialidad.*

Especificaciones con Expresiones Proposicionales

1. Representá con una fórmula de lógica proposicional los siguientes enunciados. Usá el símbolo de predicado p para representar $(a < b)$, usá q para representar $(b < c)$, y r para $(a < c)$.

   a) $a < b < c$

   b) Si $a < b$ entonces no es el caso que $(a \geq c)$.

   c) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $(a \geq c)$

   d) No es el caso que $(a < b$ y $a < c)$

   e) (No es el caso que $(a < b$ y $(a < c$ ó $b < c)))$ ó $(a \geq b$ y $a < c)$

2. Escribí una fórmula proposicional para cada una de las siguientes frases, utilizando una variable proposicional para cada sentencia atómica, aclarando siempre el significado escogido para cada variable. A veces es conveniente reescribir las frases para hacer mas claro su sentido. Por ejemplo, la frase

   Hoy es martes o jueves

   puede pensarse como dos oraciones unidas por una disyunción, pudiendo reescribirse como:

   Hoy es martes **u hoy es** jueves

   Entonces podemos formalizarla con la fórmula $p \vee q$, utilizando p para la primer sentencia y q para la segunda, es decir, definiendo:

   $$p \doteq \text{hoy es martes}$$
   $$q \doteq \text{hoy es jueves}$$

   En lo posible utilizá un mismo símbolo de proposición para la misma sentencia atómica a lo largo de todo el ejercicio, para poder comparar las fórmulas.

   a) Hoy es martes y hay sol.

   b) Hoy es martes y no hay sol.

   c) Hoy no es ni miércoles ni viernes.

   d) Mañana, llueve o no llueve.

   e) Mañana será jueves y no será jueves.

   f) Hoy es viernes, pero tengo clases de Algoritmos.

   g) Yo no voy de vacaciones y Juan y Pedro tampoco.

   h) Juan vendrá a clase, y seguro que vendrán también María o Pedro.

   i) Si no tienes menos de 18 años ni tienes antecedentes puedes irte a vivir a otro país.

   j) No es verdad que si tienes menos de 16 años y consentimiento paterno te puedas casar.

Cálculo Proposicional

Una demostración en el Cálculo Proposicional que veremos en este curso consiste en probar la **validez** *de una fórmula mediante una serie de pasos justificados con* **axiomas** *y* **teoremas** *del Cálculo. Recordemos que una fórmula es válida si para toda asignación posible de las variables es equivalente a True; por lo tanto una demostración será una serie de fórmulas, equivalentes entre sí, donde la primera fórmula es la que queremos demostrar válida y la última es True. Por ejemplo:*

$$\begin{array}{ll} & P \\ \equiv & \{ \texttt{Razón 1} \} \\ & Q \\ \equiv & \{ \texttt{Razón 2} \} \\ & \mathit{True} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} & (x > 0) \vee (x \leqslant 0) \\ \equiv & \{ \text{ Aritmética } \} \\ & (x > 0) \vee \neg(x > 0) \\ \equiv & \{ \text{ Tercero excluido } (p \vee \neg p) \} \\ & \mathit{True} \end{array}$$

El ejemplo general de la izquierda, donde se quiere demostrar que la fórmula P es válida, se puede leer de la siguiente manera: Debido a la `Razón 1` *P es equivalente a Q y debido a la* `Razón 2` *Q es equivalente a True. Por lo tanto, como el equivalente es transitivo, se concluye que P es equivalente a True. Por supuesto que este ejemplo de dos pasos se puede generalizar a cualquier cantidad necesaria de pasos.*

Un caso particular, pero muy utilizado, es cuando la fórmula que se quiere demostrar es de la forma $P \equiv Q$; por ejemplo, $p \vee q \equiv q \vee p$. Para demostrar la validez de la fórmula podemos seguir la estrategia planteada anteriormente transformando la expresión completa en True, o bien partir de la subexpresión P y transformarla en la subexpresión Q (o viceversa). En ambos casos, cada paso de "transformación" consiste en "reescribir" la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos.

Cada axioma o teorema nos habilita a reescribir una expresión de diversas maneras. Por ejemplo la Regla Dorada, cuya formulación es $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$, nos permite reescribir la expresión $P \wedge Q$ por $P \equiv Q \equiv P \vee Q$, pero también:

$$\begin{array}{rcl} P \wedge Q \equiv P & \text{por} & Q \equiv P \vee Q \\ Q \equiv P \vee Q & \text{por} & P \wedge Q \equiv P \\ P \wedge Q \equiv P \vee Q & \text{por} & P \equiv Q \\ P \wedge Q \equiv Q \equiv P \vee Q & \text{por} & Q \\ P \equiv P \vee Q & \text{por} & P \wedge Q \equiv Q \\ \text{etc} \ldots & & \end{array}$$

Notá además que el lugar de las variables P, Q y R en un axioma o teorema puede ser ocupado por cualquier expresión booleana (de tipo Bool), ya sean variables proposicionales, como p, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q \vee r$, etc, o fórmulas más concretas como $2 * 2 = 4$, $x \leqslant 0$, etc.

Sustitución y Regla de Leibniz

Dos herramientas muy importantes en el Cálculo Proposicional son la sustitución y la regla de Leibniz.

Leibniz introdujo la propiedad de que es posible sustituir en una fórmula algunos elementos por otros que satisfacen el predicado de igualdad con ellos, es decir, iguales a éstos que se están reemplazando, sin que esto altere el significado de la expresión. Una idea intuitiva de esta regla se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x & = & 5 & \quad (1) \\ y & = & x + 3 & \quad (2) \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\textit{Utilizo (1) en (2)}} \quad \left\{ \begin{array}{lcll} x & = & 5 & \quad (1) \\ y & = & 5 + 3 & \quad (2) \end{array} \right.$$

En este ejemplo, ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes.

En las demostraciones del Cálculo se utiliza todo el tiempo la regla de Leibniz para "transformar" fórmulas. Por ejemplo, si se cumple $p \vee p \equiv p$, se puede transformar la fórmula $p \wedge q$ a la fórmula $(p \vee p) \wedge q$ donde se reemplazó p por otra expresión equivalente, $p \vee p$.

Combinando sustitución con la regla de Leibniz se puede obtener transformaciones más interesantes. Por ejemplo, si se cumple $p \vee p \equiv p$ y a esta expresión se le realiza la sustitución $(p := x > 0)$ se obtiene una nueva fórmula $(x > 0 \vee x > 0 \equiv x > 0)$. Esta nueva fórmula se puede utilizar para "transformar' otra expresión.

Observar que en ambos casos se utilizó la expresión condicional "si se cumple" por lo que hay que ser cuidadoso en dónde se aplica. Una regla que se puede utilizar en esta materia para no cometer errores es asegurarse que la fórmula sea válida, específicamente, que sea un axioma o teorema.

3. Encontrá las dos expresiones equivalentes entre sí, que fueron utilizadas para transformar la primera expresión en la última y escribila entre las llaves. Comprobá si corresponde a algún axioma o teorema enumerado en el digesto de axiomas y teoremas. Subrayá la expresión que está siendo reemplazada e la primer fórmula.

   Por ejemplo,

$$\begin{array}{l} \quad q \equiv p \\ \equiv \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ \quad q \equiv p \vee p \end{array}$$

   se puede observar que la equivalencia utilizada es $p \vee p \equiv p$ que se llama idempotencia de la disyunción. Como reeplazamos p la subrayamos.

$$\begin{array}{l} \quad q \equiv \underline{p} \\ \equiv \{ \text{ Idempotencia de la disyunción } (p \vee p \equiv p) \ \} \\ \quad q \equiv p \vee p \end{array}$$

   a)
$$\begin{array}{l} \quad p \\ \equiv \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ \quad p \equiv \mathit{True} \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{l} \quad p \Rightarrow q \\ \equiv \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ \quad (p \equiv \mathit{True}) \Rightarrow q \end{array}$$

   c)
$$\begin{array}{l} \quad p \vee (q \equiv r) \\ \equiv \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ \quad p \vee q \equiv p \vee r \end{array}$$

   d)
$$\begin{array}{l} \quad q \Rightarrow p \vee q \\ \equiv \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ \quad q \Rightarrow (p \equiv q \equiv p \wedge q) \end{array}$$

4. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de forma que la sustitución $(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ justifique cómo fue aplicado cada axioma o teorema para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones. En todos los casos enunciá la fórmula cuya validez se demuestra. Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

   Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

$$\begin{array}{l} \quad \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \\ \equiv \{ \ \textit{(Definición de negación)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ \quad \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array}$$

demuestra la validez de la fórmula:	$\neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p$
utilizando el axioma “Definición de negación”:	$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q.$
con la sustitución	$P, Q := (p \Rightarrow q), p$

   Viéndolo de otro modo, ¿qué sucede si aplicamos la sustitución $(P, Q := (p \Rightarrow q), p)$ al axioma “Definición de negación”?:

$$\begin{array}{l} \quad (\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q)(P, Q := (p \Rightarrow q), p) \\ \equiv \{ \ \textit{Definición de sustitución} \ \} \\ \quad \neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \end{array}$$

   Obtenemos exactamente la fórmula a demostrar, lo que verifica que efectivamente $\mathcal{E} \doteq p \Rightarrow q$ y $\mathcal{F} \doteq p$ es una solución.

   *Para encontrar la sustitución no existe un método preciso. Podemos pensar en las variables P, Q y R de los axiomas como “comodines” diferentes, cada uno de los cuales puede representar una fórmula cualquiera (tan grande como queramos), pero de manera coherente: el lugar de un comodín es ocupado siempre por la **misma** fórmula. Una vez que tenemos la fórmula cuya validez es demostrada por el paso deductivo, la ubicación de los paréntesis y de los operadores ayuda a encontrar la sustitución utilizada. A continuación la primera es la fórmula a demostrar, y la segunda el axioma visto con “comodines”:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \neg(& p \Rightarrow q & \equiv p) & \equiv \neg & (p \Rightarrow q) & \equiv p \\ \neg(& \diamondsuit & \equiv \clubsuit) & \equiv \neg & \diamondsuit & \equiv \clubsuit \end{array}$$

Claramente el lugar de $\diamondsuit$ lo ocupa $p \Rightarrow q$, y el lugar de $\clubsuit$, la variable p.

Aclaración: Consultar la fórmula correspondiente a cada axioma o teorema en el digesto de axiomas y teoremas.

a)
$$\begin{array}{l} \quad p \equiv q \equiv r \\ \equiv \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ \quad r \equiv p \equiv q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \quad p \vee q \vee (\mathit{False} \equiv \neg q) \\ \equiv \{ \text{ (Distributividad } \vee \text{ con } \equiv)(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \ \} \\ \quad p \vee q \vee \mathit{False} \equiv p \vee q \vee \neg q \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} \quad \neg p \wedge (r \Rightarrow s) \\ \equiv \{ \text{ (Regla dorada)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ \quad \neg p \equiv r \Rightarrow s \equiv \neg p \vee (r \Rightarrow s) \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} \quad n \ \text{ mód } 4 = 0 \Rightarrow n \ \text{ mód } 2 = 0 \\ \equiv \{ \text{ (Definición de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ \quad n \ \text{ mód } 4 = 0 \vee n \ \text{ mód } 2 = 0 \equiv n \ \text{ mód } 2 = 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{l} \quad x > 2 \vee y > 5 \equiv x > 2 \vee \neg y > 5 \\ \equiv \{ \text{ (Teorema } *)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ \quad x > 2 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{l} \quad \neg(p \wedge q \wedge r \Rightarrow p \wedge s) \\ \equiv \{ \text{ (Negación de } \Rightarrow)(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ \quad p \wedge q \wedge r \wedge \neg(p \wedge s) \end{array}$$

5. Completá las siguientes demostraciones especificando el axioma o teorema utilizado y la sustitución correspondiente; subrayá la subexpresión donde se aplica.

a)
$$\begin{array}{l} \quad \neg\neg\neg p \equiv q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad \neg p \equiv q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad \neg(p \equiv q) \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \not\equiv q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \quad p \vee (q \equiv r \equiv s) \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \vee (q \equiv r) \equiv p \vee s \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \vee q \equiv p \vee r \equiv p \vee s \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} \quad p \Rightarrow q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \vee q \equiv q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad q \equiv p \vee q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \wedge q \equiv p \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} \quad \neg p \equiv \neg q \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad \neg(p \equiv \neg q) \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad \neg(\neg q \equiv p) \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad \neg\neg(q \equiv p) \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad \neg\neg(p \equiv q) \\ \equiv \{ \qquad\qquad \} \\ \quad p \equiv q \end{array}$$

Equivalencia, Discrepancia y Negación

6. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas *válidas*. Realizá la demostración con máximo nivel de detalle, esto es, justificando cada paso con un axioma y la sustitución utilizada en el mismo. Como ejemplo demostramos la *Asociatividad de la discrepancia*: $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$, partiendo de la parte izquierda:

$$\begin{array}{l} \quad (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\ \equiv \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(Q := (q \not\equiv r)) \ \} \\ \quad \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\ \equiv \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := q, r) \ \} \\ \quad \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\ \equiv \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, r) \ \} \\ \quad \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\ \equiv \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := (p \equiv \neg q), r) \ \} \\ \quad \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\ \equiv \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(Q := \neg q) \ \} \\ \quad \underline{(\neg q \equiv p)} \not\equiv r \\ \equiv \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, p) \ \} \\ \quad \neg\underline{(q \equiv p)} \not\equiv r \\ \equiv \{ \text{ Conmutatividad de } \equiv \} \\ \quad \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\ \equiv \{ \text{ Definición de } \not\equiv \} \\ \quad (p \not\equiv q) \not\equiv r \end{array}$$

a) *Reflexibidad del equivalente*: $(p \equiv p) \equiv \mathit{True}$

b) *Doble negación*: $\neg\neg p \equiv p$

c) *Equivalencia y negación*: $p \equiv False \equiv \neg p$

d) *Neutro de la discrepancia*: $(p \not\equiv false) \equiv p$

e) *Absurdo*: $p \Rightarrow False \equiv \neg p$.

7. Decidí si son válidas o no las siguientes fórmulas. Justificá apropiadamente.

   a) $p \equiv p \equiv p \equiv True$

   b) $((p \not\equiv q) \equiv r) \equiv (p \not\equiv (q \equiv r))$

   c) $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

   d) $\neg p \equiv False$

   e) $\neg(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

8. Inventá dos fórmulas que utilicen sólo $\equiv$, $\not\equiv$ y $\neg$ una válida (teorema) y una no válida.

9. En la tabla de Axiomas y Teoremas básicos, se enuncia el metateorema de *True*, que dice, si P es un teorema entonces $P \equiv True$ es un teorema. ¿Qué es un metateorema?¿Para qué sirve este metateorema?

10. Demostrá por inducción el siguiente metateorema: $\underbrace{P \equiv P \equiv \ldots \equiv P}_{n \text{ veces}}$ es equivalente a *True* si n es par.

Disyunción y Conjunción

11. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado.

    a) *Distributividad de la disyunción con la disyunción*: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

    b) *Elemento absorbente de la disyunción*: $p \vee True \equiv True$

    c) *Elemento neutro de la disyunción*: $p \vee False \equiv p$

    d) *Teorema Estrella* : $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv q$

12. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado. **Aclaración:** Desde ahora en adelante, en cada ejercicio se pueden utilizar los teoremas ya demostrados en los ejercicios anteriores.

    a) *Distributividad de la disyunción con la conjunción*: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

    b) *De Morgan para la disyunción*: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

    c) *Asociatividad de la conjunción*: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

    d) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$

    e) *Conmutatividad de la conjunción*: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

    f) *Elemento absorbente de la conjunción*: $p \wedge False \equiv False$

    g) *Elemento neutro de la conjunción*: $p \wedge True \equiv p$

    h) *De Morgan para la conjunción*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg p$

    i) *Ley de absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

    j) *Ley de absorción (bis)*: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

13. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo.

    a) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r)$

    b) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv p$

    c) $p \wedge (q \equiv r \equiv s) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv (p \wedge s)$

    d) $\big(a \vee b \vee c \equiv a \vee b \equiv a \vee c \equiv b \vee c \equiv False\big) \equiv \big((a \equiv b \equiv c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)\big)$