**Introducción a los Algoritmos - 1er. cuatrimestre 2011**

# Guía 4: Cálculo Proposicional y Aplicaciones

Docentes: Araceli Acosta, Carlos Areces, Mariana Badano, Luciana Benotti,
Javier Blanco, Paula Estrella, Pedro Sánchez Terraf, Mauricio Tellechea,

*El objetivo principal de esta guía es lograr un buen entrenamiento de las habilidades necesarias para realizar una demostración formal en este sistema lógico sencillo, que resulta un pilar fundamental para otros cálculos mas complejos y potentes.*

*En esta práctica, como en el resto de las prácticas de esta materia, los ejercicios marcados como* **(!)** *son algo más complejos que el resto; y son modelos de los ejercicios que se tomarán en los parciales. Los ejercicios marcados como ☺ son para las almas inquietas que quieren explorar más alla de los contenidos que veremos en la materia.*

---

## Cálculo Proposicional

*A partir de esta sección, comenzamos a trabajar con demostraciones con el Cálculo Proposicional.*

*Una demostración en el Cálculo Proposicional que veremos en este curso consiste en probar la validez de una fórmula del estilo $P \equiv Q$. Para ello podemos seguir dos estrategias: aplicar sucesivos pasos transformando la expresión completa en True, o bien partir de la subexpresión $P$ y transformarla en la subexpresión $Q$ (o viceversa). En ambos casos, cada paso de "transformación" consiste en "reescribir" la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos.*

*Cada axioma o teorema nos habilita a reescribir una expresión de diversas maneras. Por ejemplo la Regla Dorada, cuya formulación es $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$, nos permite reescribir la expresión $P \wedge Q$ por $P \equiv Q \equiv P \vee Q$, pero también:*

$$\begin{array}{rcl} P \wedge Q \equiv P & \textit{por} & Q \equiv P \vee Q \\ Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \wedge Q \equiv P \\ P \wedge Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \equiv Q \\ P \wedge Q \equiv Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & Q \\ P \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \wedge Q \equiv Q \\ \textit{etc} \ldots & & \end{array}$$

*Notá además que el lugar de las variables $P, Q$ y $R$ en un axioma o teorema puede ser ocupado por cualquier fórmula que involucre variables proposicionales, como $p$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q \vee r$, etc, o incluso fórmulas más concretas como $2 * 2 = 4$, $x \leqslant 0$, etc. Típicamente un paso de una demostración será como el siguiente:*

$$\begin{array}{ll} & (x \mod 2 = 0) \wedge (x \geqslant 0) \equiv (x \mod 2 = 0) \\ \equiv & \{ \text{ (Regla Dorada)}(P, Q := x \mod 2 = 0, x \geqslant 0) \ \} \\ & (x \geqslant 0) \equiv (x \mod 2 = 0) \vee (x \geqslant 0) \end{array}$$

*Los siguientes ejercicios nos introducen gradualmente en las demostraciones de la lógica proposicional, en las diferentes formas de utilizar un axioma o teorema, primero resolviendo un paso deductivo sencillo, para luego avanzar en la tarea de hacer una demostración completa.*

1. Encontrá el axioma o teorema utilizado para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones que consta de un solo paso deductivo. Por ejemplo, el siguiente paso:

$$\begin{array}{ll} & q \equiv p \\ \equiv & \{ \qquad\qquad\qquad \} \\ & p \equiv q \end{array}$$

nos dice que $(q \equiv p) \equiv (p \equiv q)$, es decir, que no importa el "orden" de los operandos del $\equiv$ (notá que se pueden sacar los paréntesis). Esta es una forma particular de utilizar el axioma de Conmutatividad de la equivalencia (cuya formulación es $P \equiv Q \equiv Q \equiv P$): reescribimos $Q \equiv P$ con $P \equiv Q$, (cuando $p$ ocupa el lugar de $P$, y $q$ el lugar de $Q$, o más sintéticamente $P, Q := p, q$).

a) $p \equiv False$
$\equiv \{ \qquad \}$
$\neg p$

b) $p \Rightarrow q$
$\equiv \{ \qquad \}$
$p \vee q \equiv q$

c) $q \equiv p \vee q$
$\equiv \{ \qquad \}$
$p \wedge q \equiv p$

d) $p \vee (q \equiv r)$
$\equiv \{ \qquad \}$
$p \vee q \equiv p \vee r$

e) $p \vee False$
$\equiv \{ \qquad \}$
$p$

f) $True \equiv p$
$\equiv \{ \qquad \}$
$p$

2. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de forma que la sustitución $(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ justifique cómo fue aplicado cada axioma o teorema para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones. En todos los casos enunciá la formula cuya validez se demuestra. Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

   *Por ejemplo, el siguiente paso deductivo:*

   $\neg(p \Rightarrow q \equiv p)$
   $\equiv \{$ *(Definición de negación)*$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
   $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p$

   *demuestra la validez de la fórmula:* $\neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p$
   *utilizando el axioma "Definición de negación":* $\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q.$
   *con la sustitución* $P, Q := (p \Rightarrow q), p$

   *Viéndolo de otro modo, ¿qué sucede si aplicamos la sustitución* $(P, Q := (p \Rightarrow q), p)$ *al axioma "Definición de negación"?:*

   $(\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q)(P, Q := (p \Rightarrow q), p)$
   $\equiv \{$ *Definición de sustitución* $\}$
   $\neg(p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv p$

   *Obtenemos exactamente la fórmula a demostrar, lo que verifica que efectivamente* $\mathcal{E} \doteq p \Rightarrow q$ *y* $\mathcal{F} \doteq p$ *es una solución.*

   *Para encontrar la sustitución no existe un método preciso. Podemos pensar en las variables* $P, Q$ *y* $R$ *de los axiomas como "comodines" diferentes, cada uno de los cuales puede representa una formula cualquiera (tan grande como queramos), pero de manera coherente: el lugar de un comodín es ocupado siempre por la* ***misma*** *fórmula. Una vez que tenemos la fórmula cuya validez es demostrada por el paso deductivo, la ubicación de los paréntesis y de los operadores ayuda a encontrar la sustitución utilizada. A continuación la primera es la fórmula a demostrar, y la segunda el axioma visto con "comodines":*

   $$\neg(\ p \Rightarrow q \equiv p) \equiv \neg\ (p \Rightarrow q) \equiv p$$
   $$\neg(\quad \diamondsuit \quad \equiv \clubsuit) \equiv \neg \quad \diamondsuit \quad \equiv \clubsuit$$

   *Claramente el lugar de* $\diamondsuit$ *lo ocupa* $p \Rightarrow q$*, y el lugar de* $\clubsuit$*, la variable* $p$.

   a) $p \equiv q \equiv r$
   $\equiv \{$ (Conmutatividad de $\equiv$)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
   $r \equiv p \equiv q$

   b) $p \vee q \vee (False \equiv \neg q)$
   $\equiv \{$ (Distributividad $\vee$ con $\equiv$)$(P, Q, R := \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ $\}$
   $p \vee q \vee False \equiv p \vee q \vee \neg q$

   c) $\neg p \wedge (r \Rightarrow s)$
   $\equiv \{$ (Regla dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
   $\neg p \equiv r \Rightarrow s \equiv \neg p \vee (r \Rightarrow s)$

   d) $n \text{ mód } 4 = 0 \Rightarrow n \text{ mód } 2 = 0$
   $\equiv \{$ (Definición de $\Rightarrow$)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
   $n \text{ mód } 4 = 0 \vee n \text{ mód } 2 = 0 \equiv n \text{ mód } 2 = 0$

   e) $x > 2 \vee y > 5 \equiv x > 2 \vee \neg y > 5$
   $\equiv \{$ (Teorema $*$)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
   $x > 2$

   f) $\neg(p \wedge q \wedge r \Rightarrow p \wedge s)$
   $\equiv \{$ (Negación de $\Rightarrow$)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
   $p \wedge q \wedge r \wedge \neg(p \wedge s)$

3. Completá las siguientes demostraciones, ahora encontrando tanto el axioma (o teorema) y la sustitución utilizados. Además enunciá en cada caso la fórmula cuya validez es demostrada.

a)
$$\begin{array}{ll} & (p \vee q \Rightarrow r) \equiv \mathit{False} \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg(p \vee q \Rightarrow r) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \vee (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow r \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} & \neg s \equiv r \vee \neg s \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & r \wedge \neg s \equiv r \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} & p \vee (q \equiv p \wedge r) \equiv p \vee q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \vee (p \wedge r) \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ll} & r \equiv r \equiv p \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{ll} & \mathit{True} \equiv \mathit{False} \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \mathit{False} \end{array}$$

4. Al igual que el ejercicio anterior, completá los pasos deductivos, pero ahora subrayando las subexpresiones donde se aplica el axioma. Notá que en estos casos, cada paso paso deductivo justifica el reemplazo de una subexpresión por otra que es equivalente. Reemplazar "iguales por iguales" es lícito en cualquier contexto, y es algo que efectivamente venimos realizando desde las primeras demostraciones de la Guía 1. Por ejemplo, en el siguiente paso, aplicamos la "Definición de negación" en la subexpresión $p \equiv \mathit{False}$:

$$\begin{array}{ll} & p \wedge \underline{(p \equiv \mathit{False})} \equiv p \wedge q \equiv p \vee q \\ \equiv \{ & \text{(Definición de negación)}(P := p) \ \} \\ & p \wedge \boxed{\neg p} \equiv p \wedge q \equiv p \vee q \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{ll} & p \equiv q \equiv p \wedge q \equiv p \vee q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & p \vee (q \wedge r) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \vee (q \equiv r \equiv q \vee r) \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} & (\neg q \Rightarrow r \vee p \equiv \mathit{true}) \Leftarrow (p \vee r) \wedge \neg q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & (\neg q \Rightarrow r \vee p) \Leftarrow (p \vee r) \wedge \neg q \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} & \neg(\neg(\neg(\neg(p \equiv q) \equiv r) \equiv s) \equiv t) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg(\neg((\neg(p \equiv q) \not\equiv r) \equiv s) \equiv t) \end{array}$$

5. Completá las siguientes demostraciones especificando el axioma o teorema utilizado y la sustitución correspondiente; subrayá la subexpresión donde se aplica. Luego, verificá la demostración utilizando el Verificador de Pruebas `yahc`.

a)
$$\begin{array}{ll} & \neg\neg\neg p \equiv q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg p \equiv q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg(p \equiv q) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \not\equiv q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & p \vee (q \equiv r \equiv s) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \vee (q \equiv r) \equiv p \vee s \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \vee q \equiv p \vee r \equiv p \vee s \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \vee q \equiv q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & q \equiv p \vee q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \wedge q \equiv p \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} & \neg p \equiv \neg q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg(p \equiv \neg q) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg(\neg q \equiv p) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg\neg(q \equiv p) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & \neg\neg(p \equiv q) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad \} \\ & p \equiv q \end{array}$$

6. En las siguientes demostraciones se ha utilizado la **Regla Dorada** para transformar una expresión en otra. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ que explican como se aplicó la regla.

a)
$$\begin{array}{ll} & (r \Rightarrow z \vee q) \wedge (r \equiv s) \equiv (r \Rightarrow z \vee q) \equiv (r \equiv s) \\ \equiv \{ & \text{(Regla Dorada)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & (r \Rightarrow z \vee q) \vee (r \equiv s) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & (z \wedge r) \vee (m \Rightarrow n \vee r) \equiv (z \wedge r) \equiv (m \Rightarrow n \vee r) \\ \equiv \{ & \text{(Regla Dorada)}(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F}) \ \} \\ & (z \wedge r) \wedge (m \Rightarrow n \vee r) \end{array}$$

*c)* $(p \vee (q \equiv r)) \wedge (m \Rightarrow n)$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(p \vee (q \equiv r)) \vee (m \Rightarrow n) \equiv (p \vee (q \equiv r)) \equiv (m \Rightarrow n)$

*d)* $(p \vee q \vee r) \vee (s \vee t \vee z)$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(p \vee q \vee r) \wedge (s \vee t \vee z) \equiv (p \vee q \vee r) \equiv (s \vee t \vee z)$

*e)* $((p \vee q) \Rightarrow r) \equiv z \wedge r$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$((p \vee q) \Rightarrow r) \vee z \wedge r \equiv ((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge z \wedge r$

*f)* $p \Rightarrow q$
$\equiv \{$ (Regla Dorada)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(p \Rightarrow q) \vee z \equiv z \equiv p \Rightarrow q \wedge z$

7. En las siguientes demostraciones se ha utilizado la **Teorema Estrella** para transformar una expresión en otra. Encontrá las incógnitas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ que explican como se aplicó la regla.

*a)* $(r \equiv s) \vee (p \Rightarrow (q \vee r))$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(r \equiv s) \vee \neg(p \Rightarrow (q \vee r)) \equiv (r \equiv s)$

*b)* $(r \Rightarrow s \vee q) \vee \neg(z \vee r)$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(r \Rightarrow s \vee q) \equiv (r \Rightarrow s \vee q) \vee (z \vee r)$

*c)* $(z \vee (s \wedge t)) \vee (p \Rightarrow q) \equiv (z \vee (s \wedge t)) \vee \neg(p \Rightarrow q)$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(z \vee (s \wedge t))$

*d)* $(s \vee (r \wedge m))$
$\equiv \{$ (Teorema Estrella)$(P, Q := \mathcal{E}, \mathcal{F})$ $\}$
$(s \vee (r \wedge m)) \vee z \equiv (s \vee (r \wedge m)) \vee \neg z$

8. Encontrá el axioma o teorema y la sustitución utilizados para transformar una expresión en la otra, en cada una de las siguientes demostraciones

**Ayuda:** En todos los casos se trata de axiomas o teoremas con $\vee$ y/o $\equiv$.

*a)* $((p \wedge r \Rightarrow q) \vee (r \equiv p \wedge r)) \vee z$
$\equiv \{$ $\}$
$(p \wedge r \Rightarrow q) \vee ((r \equiv p \wedge r) \vee z)$

*b)* $(p \wedge r \Rightarrow q) \vee (r \equiv p \wedge r)$
$\equiv \{$ $\}$
$(r \equiv p \wedge r) \vee (p \wedge r \Rightarrow q)$

*c)* $(q \Rightarrow (z \equiv r)) \vee (p \vee (r \wedge q)))$
$\equiv \{$ $\}$
$((q \Rightarrow (z \equiv r)) \vee p) \vee (r \wedge q))$

*d)* $(p \wedge (r \vee z) \Rightarrow q) \vee (p \wedge (r \vee z) \Rightarrow q)$
$\equiv \{$ $\}$
$(p \wedge (r \vee z) \Rightarrow q)$

*e)* $(r \wedge s \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow z) \equiv (r \wedge s \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
$\equiv \{$ $\}$
$(r \wedge s \Rightarrow q) \vee ((q \Rightarrow z) \equiv (p \Rightarrow r))$

*f)* $(s \Rightarrow q) \vee (\neg z \wedge p) \equiv (s \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
$\equiv \{$ $\}$
$((p \Rightarrow r) \equiv \neg z \wedge p) \vee (s \Rightarrow q)$

9. En las siguientes pasos deductivos se han eliminado conjunciones e implicaciones. Encontrá el axioma o teorema y la sustitución utilizados para transformar una expresión en la otra.

*a)* $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge s \equiv q)$
$\equiv \{$ $\}$
$(p \vee q) \vee (r \wedge s \equiv q) \equiv (r \wedge s \equiv q)$

*b)* $(p \wedge (r \vee s)) \Rightarrow (p \equiv q)$
$\equiv \{$ $\}$
$\neg(p \wedge (r \vee s)) \vee (p \equiv q)$

*c)* $(r \vee s \equiv z) \wedge (p \wedge q) \equiv (r \vee s \equiv z) \equiv (p \wedge q)$
$\equiv \{$ $\}$
$(r \vee s \equiv z) \vee (p \wedge q)$

*d)* $(p \equiv q) \Rightarrow (z \wedge q)$
$\equiv \{$ $\}$
$\neg(p \equiv q) \vee (z \wedge q)$

*e)* $(p \vee (q \equiv r)) \Rightarrow (z \wedge s \equiv p)$
$\equiv \{$ $\}$
$(p \vee (q \equiv r)) \vee (z \wedge s \equiv p) \equiv (z \wedge s \equiv p)$

*f)* $(r \vee s) \wedge (p \wedge r \equiv z) \equiv (r \vee s)$
$\equiv \{$ $\}$
$(r \vee s) \vee (p \wedge r \equiv z) \equiv (p \wedge r \equiv z)$

10. Demostrá (y verificá en `yahc`) que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas *válidas*. Realizá la demostración con máximo nivel de detalle, esto es, justificando cada paso

con un axioma y la sustitución utilizada en el mismo. Como ejemplo demostramos la *Asociatividad de la discrepancia*: $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$, partiendo de la parte izquierda:

$$
\begin{array}{l}
\quad (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\
\equiv \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(Q := (q \not\equiv r)) \ \} \\
\quad \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\
\equiv \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := q, r) \ \} \\
\quad \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\
\equiv \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, r) \ \} \\
\quad \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\
\equiv \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := (p \equiv \neg q), r) \ \} \\
\quad \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\
\equiv \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(Q := \neg q) \ \} \\
\quad \underline{(\neg q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, p) \ \} \\
\quad \neg\underline{(q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv \{ \text{ Conmutatividad de } \equiv \ \} \\
\quad \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\
\equiv \{ \ \text{ Definición de } \not\equiv \ \} \\
\quad (p \not\equiv q) \not\equiv r
\end{array}
$$

*a*) *Distributividad de la disyunción con la disyunción*: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

*b*) *Elemento absorbente de la disyunción*: $p \vee true \equiv true$

*c*) *De Morgan para la disyunción*: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

11. **(!)** Demostrá (y verificá en `yahc`) que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado, ahora sin necesidad de especificar la sustitución utilizada.

*a*) *Caracterización de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

*b*) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.

*c*) *Modus ponens*: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.

*d*) *Modus tollens*: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.

*e*) *Neutro de la discrepancia*: $(p \not\equiv false) \equiv p$

*f*) *Distributividad de la disyunción con la conjunción*: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

*g*) *Asociatividad de la conjunción*: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

*h*) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$

*i*) *Neutro de la conjunción*: $p \wedge True \equiv p$

*j*) *Ley de absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

*k*) *Ley de absorción (bis)*: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

*l*) *Teorema de De Morgan*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

12. **(!) Ejercicios Extra:** Demostrá (y verificá en `yahc`) que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado, sin necesidad de especificar la sustitución utilizada.

*a*) $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$.

*b*) $p \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p$.

*c*) $p \vee (p \Rightarrow q) \equiv True$.

*d*) $p \vee (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$.

*e*) $False \Rightarrow p \equiv True$.

*f*) $p \Rightarrow True \equiv True$.

*g*) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow \neg q \vee r)$.

*h*) *Consecuencia de True*: $True \Rightarrow p \equiv p$.

*i*) *Absurdo*: $p \Rightarrow False \equiv \neg p$.

*j*) *Intercambio para* $\Rightarrow$: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.

*k*) *Distributividad a izquierda de* $\Rightarrow$ *con* $\equiv$: $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow r$.

*l*) *Doble implicación*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \equiv q$.

*m*) *Contrarrecíproca*: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

*n*) *Transitividad*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

*ñ*) *Monotonía conjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$.

*o*) *Monotonía disjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$.

*p*) *Relación entre* $\vee$ *y* $\not\equiv$: $p \not\equiv q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

*q*) *Conmutatividad de la discrepancia*: $(p \not\equiv q) \equiv (q \not\equiv p)$

*r*) *Asociatividad mutua equivalencia-discrepancia*: $(p \equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \not\equiv r)$

*s*) *Teorema de Intercambiabilidad entre* $\not\equiv$ *y* $\equiv$: $p \equiv q \not\equiv r \equiv p \not\equiv q \equiv r$

13. **(!)** Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo.

    *a*) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r)$

    *b*) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv p$

    *c*) $p \wedge (q \equiv r \equiv s) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv (p \wedge s)$

    *d*) $\big(a \vee b \vee c \equiv a \vee b \equiv a \vee c \equiv b \vee c \equiv False\big) \equiv \big((a \equiv b \equiv c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)\big)$

---

**Aplicaciones del Cálculo Proposicional**

*Además de ser una herramienta poderosa para probar que una fórmula es válida o que un programa es correcto, el Cálculo Proposicional puede utilizarse también para resolver acertijos o determinar si un razonamiento es válido. La ventaja de usar el Cálculo Proposicional en vez de tablas de verdad, es que éste aporta soluciones más elegantes y permite manipular fórmulas que involucren muchas variables.*

*El* ***análisis de razonamientos lógicos*** *busca determinar si un enunciado en lenguaje natural es válido o no. Para ello, es necesario identificar proposiciones atómicas y operadores involucrados para convertirlos en proposiciones, algunas de las cuales serán premisas (o hipótesis)* $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ *y una de ellas (la última) será la conclusión* $C$. *Para demostrar que el razonamiento es válido se construye una prueba de* $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow C$ *o si el razonamiento no es válido se da un contraejemplo asignando un valor de verdad a cada variable proposicional. El ejercicio 14 propone resolver este tipo de razonamientos.*

*Una tarea muy importante en el desarrollo de software es el* modelado de problemas. *Cuando nos encontramos con un problema a resolver la primera tarea que se plantea es cómo expresar este problema ordenadamente para trabajar con rigor en su solución. En el tipo de ejercicio mencionado arriba se trabaja formalizando razonamientos lógicos sobre el cálculo proposicional. La idea principal consiste en modelar oraciones del lenguaje natural en términos proposicionales. En los siguientes ejercicios damos un paso más en la formalización trabajando con problemas cuyo modelado es más complejo.*

*Los ejercicios consisten en combinaciones del Cálculo Proposicional con temas que ya hemos visto anteriormente: definición de funciones recursivas, razonamiento sobre el operador* máx, *y demostraciones por inducción.*

*La formalización de lenguaje natural puede resultar ambigua. A continuación se listan posibles traducciones de conectores del lenguaje natural a operadores lógicos, aunque no siempre son las apropiadas y dependen del contexto.*

| | |
|---|---|
| $\neg$ | *“No –”, “Es falso que –”, “No es el caso que –”, etc.* |
| $\wedge$ | *“– y –”, “–, pero –”, “–, sin embargo –”,* |
| $\vee$ | *“– o –”, “– o – o ambos –”.* |
| $\Rightarrow$ | *“[Si] – entonces –”, “– luego –”, “–. Como consecuencia, –”* |
| $\equiv$ | *“– si y sólo si –”, “Son equivalentes – y –”.* |
| $\not\equiv$ | *“O bien – o –”.* |

14. **(!)** Formalizá los siguientes razonamientos en el cálculo proposicional y demostrá su corrección. Por ejemplo:

**Enunciado**: Si el gobernador quiere mejorar su imagen, o mejora su política social o gasta más en publicidad. El gobernador no mejora su política social. Luego, si el gobernador quiere mejorar su imagen, entonces deberá gastar más en publicidad.

**Solución**: Si utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

$$\begin{aligned} i &\doteq \text{el gobernador quiere mejorar su imagen} \\ s &\doteq \text{el gobernador mejora su política social} \\ p &\doteq \text{el gobernador gasta más en publicidad} \end{aligned}$$

podemos especificar la primer sentencia con la fórmula $i \Rightarrow s \vee p$, la segunda con $\neg s$, y la tercera con $i \Rightarrow p$. La primera y segunda sentencias son las *hipótesis del razonamiento*, y la final la *conclusión*. Un razonamiento de este tipo es correcto cuando la conjunción de las hipótesis $P_1, P_2, \ldots, P_n$ implica la conclusión $C$, es decir cuando la siguiente fórmula es válida:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$$

En nuestro ejemplo, el razonamiento completo se puede formalizar como:

$$(i \Rightarrow s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$$

A continuación demostramos que este razonamiento es válido, es decir, que su formula es válida. Notá que un razonamiento de este estilo incluye siempre un operador $\Rightarrow$ y posiblemente varios $\wedge$. Suele ser útil entonces utilizar el teorema de "Caracterización de implicación" y el teorema de "Debilitamiento para $\wedge$" (ej. 7 items $a$ y $b$).

$$\begin{aligned}
& (\underline{i \Rightarrow s \vee p}) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& \underline{(\neg i \vee s \vee p)} \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Conmutatividad y Asociatividad de } \vee \} \\
& \underline{((\neg i \vee p) \vee s) \wedge \neg s} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Distributividad de } \wedge \text{ con } \vee \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee (\underline{s} \wedge \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Doble negación } \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee \underline{(\neg\neg s \wedge \neg s)} \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ De Morgan } \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee \neg(\underline{\neg s \vee s}) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Tercero excluido } \} \\
& ((\neg i \vee p) \wedge \neg s) \vee \neg(\mathit{True}) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Definición de } \mathit{False}, \text{ Neutro de } \vee \} \\
& (\underline{(\neg i \vee p)} \wedge \neg s) \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Caracterización de } \Rightarrow \} \\
& (i \Rightarrow p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p) \\
\equiv\ & \{ \text{ Debilitamiento para } \wedge \} \\
& \mathit{True}
\end{aligned}$$

*a*) Si hago mucho deporte estoy cansado. No estoy cansado, por lo tanto no hago mucho deporte.

*b*) Si llueve y no tengo paraguas, entonces me mojo y me resfrío. Es el caso que llueve y no tengo paraguas, por lo tanto, me mojo y me resfrío.

*c*) Si el gobernador quiere mejorar su imagen entonces mejora su política social. El gobernador no mejora su política social por lo tanto no quiere mejorar su imagen.

*d*) Si el presidente entiende las protestas de la gente entonces si quiere ser reelegido cambiará su política. El presidente quiere ser reelegido. Luego, si el presidente entiende las protestas de la gente, entonces cambiará su política.

*e*) Si la ciudadanía romana hubiera sido una garantía de los derechos civiles, los romanos habrían gozado de libertad religiosa. Si los romanos hubieran gozado de libertad religiosa, entonces no se habría perseguido a los primeros cristianos. Pero los primeros cristianos fueron perseguidos. Por consiguiente, la ciudadanía romana no puede haber sido una garantía de los derechos civiles.

15. ☺ Demostrá las siguientes propiedades del máximo (que en el práctico 1 consideramos como axiomas), utilizando la siguiente definición que relaciona a max con $\leqslant$ para cualquier valor de $k$:

$$p \max q \leqslant k \equiv p \leqslant k \wedge q \leqslant k$$

y el teorema de *Igualdad indirecta*, que relaciona el $=$ con el $\leqslant$ para cualquier valor de $k$:

$$p = q \equiv p \leqslant k \equiv q \leqslant k$$

Por ejemplo, demostramos la *Idempotencia* ($x \max x = x$):

$$\begin{array}{ll} & x \max x \leqslant k \\ \equiv & \{ \text{ Definición de max } \} \\ & x \leqslant k \wedge x \leqslant k \\ \equiv & \{ \text{ Idempotencia de } \wedge \text{ } \} \\ & x \leqslant k \end{array}$$

Hemos demostrado $x \max x \leqslant k \ \equiv \ x \leqslant k$, luego

$$\begin{array}{ll} & x \max x \leqslant k \equiv x \leqslant k \\ \equiv & \{ \text{ Igualdad indirecta } \} \\ & x \max x = x \end{array}$$

*a*) *Asociatividad:* $x \max (y \max z) = (x \max y) \max z$.

*b*) *Conmutatividad:* $x \max y = y \max x$.

*c*) *Distributividad respecto a* $+$: $x + (y \max z) = (x + y) \max (x + z)$.

16. ☺ Suponiendo $n \geqslant 0$, demostrá por inducción las siguientes propiedades de $+\!\!+$ con . y $\uparrow$:

*a*) $(xs +\!\!+ ys).n = (n < \#xs \rightarrow xs.n$
$\qquad\qquad\qquad\quad \Box n \geqslant \#xs \rightarrow ys.(n - \#xs)$
$\qquad\qquad\qquad\quad )$

*b*) $(xs +\!\!+ ys) \uparrow n = (n < \#xs \rightarrow xs \uparrow n$
$\qquad\qquad\qquad\quad \Box n \geqslant \#xs \rightarrow xs +\!\!+ (ys \uparrow (n - \#xs))$
$\qquad\qquad\qquad\quad )$

**Ayuda:** Para el ítem *a*) debés demostrar por inducción (doble!) la validez de las siguientes fórmulas:

*i*) $n \geqslant 0 \wedge n < \#xs \Rightarrow (xs +\!\!+ ys).n = xs.n$

*ii*) $n \geqslant 0 \wedge n \geqslant \#xs \Rightarrow (xs +\!\!+ ys).n = ys.(n - \#xs)$

17. ☺ Encontrá la propiedad análoga a la del ejercicio anterior, ítem *b*) respecto a $\downarrow$ y demostrala.

18. ☺ Demostrá por inducción que cuando $n$ es par, la fórmula $\overbrace{p \equiv \cdots \equiv p}^{n}$ es un teorema.