Introducción a los algoritmos - Segundo cuatrimestre 2011

Guía 5: Lógica de Predicados

Docentes: Araceli Acosta, Walter Alini, Laura Alonso Alemany, Luciana Benotti, Ezequiel Orbe

La lógica de cuantificadores o lógica de primer orden es el sistema lógico estándar que formaliza el sistema deductivo natural. El objetivo general de esta guía es aprender a manipular fórmulas con cuantificadores universal (∀) y existencial (∃), tanto para interpretar su significado, como para utilizarlas para expresar propiedades, modelar problemas de razonamiento, etc. Uno de los objetivos específicos más importantes es extender las habilidades logradas en el cálculo proposicional, para realizar demostraciones formales en este sistema lógico.

Interpretación y construcción de modelos en lógica de predicados

La lógica de cuantificadores extiende la lógica proposicional, incorporando dos operadores de ***cuantificación****. Por ejemplo, sea el predicado $T.x$, definido como*

$$T.x \doteq \text{x es múltiplo de 3}$$

el ***cuantificador universal*** *∀ permite expresar que todo x es múltiplo de 3. Esto se denota por $\langle \forall x \; : \; : \; T.x \rangle$. En general, el cuantificador universal indica que la propiedad es satisfecha por* todos *los valores de la variable. El* ***cuantificador existencial*** *∃, expresa que la propiedad es satisfecha por* al menos un valor *de x. Por ejemplo $\langle \exists x \; : \; : \; T.x \rangle$ indica que existe un x que es múltiplo de 3. El conjunto de valores sobre el que la propiedad expresada se evalúa se especifica en el* ***rango*** *de la fórmula. Mientras que la propiedad se expecifica en el* ***término****. El rango y el término se escriben en las siguientes ubicaciones:*

$$\langle \forall x \; : \; rango.x \; : \; termino.x \rangle \qquad \langle \exists x \; : \; rango.x \; : \; termino.x \rangle$$

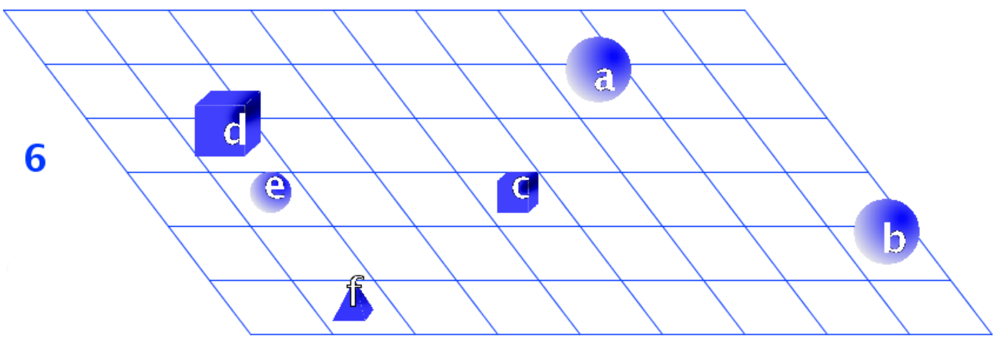
Por ejemplo, el enunciado "Todos los naturales son enteros" se formaliza como:

$$\langle \exists x \; : \; naturales.x \; : \; enteros.x \rangle$$

dado que el enunciado sólo se evalúa sobre el conjunto de naturales (y no de los reales, por ejemplo).

El objetivo de los siguientes ejercicios es clarificar el significado de los nuevos operadores de cuantificación, para lograr la capacidad de leer *y* escribir *fórmulas que los involucran.*

1. Dado el siguiente mundo



   I) Decidí si las siguientes sentencias son satisfechas o no (y por qué). Por ejemplo, la sentencia "Hay un cubo grande" se satisface por el objeto `d`. Sin embargo, la frase "Todas las esferas son grandes", no se satisface a causa de la esfera pequeña `e`.

   II) Expresá formalmente cada sentencia y verificala en `ithaca`.

a) `f` está entre `d` y `e`.

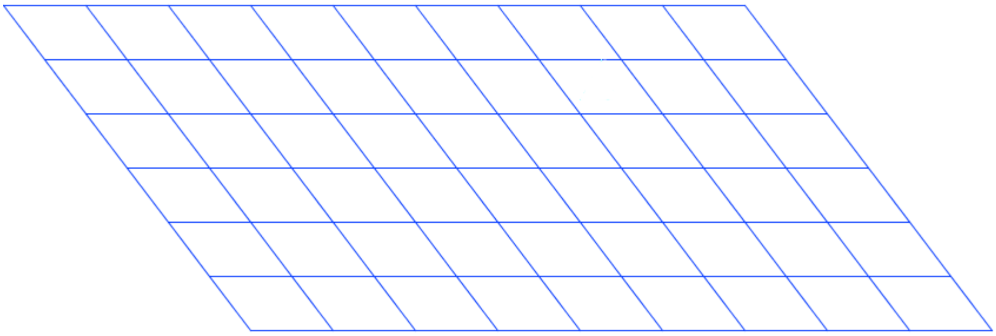
b) Todas las pirámides son pequeñas.

c) Existe (al menos) un cubo pequeño.

d) `a` está a la derecha de todo.

e) Nada está a la derecha de `b`.

2. Construí un mundo en el que se satisfagan progresivamente cada una de las siguientes sentencias, utilizando los objetos disponibles en `ithaca` (cubos, esferas y pirámides, pequeñas o grandes). Luego formalizá las sentencias y verificá que efectivamente se satisfagan.



a) Algo es grande.

b) Hay un cubo.

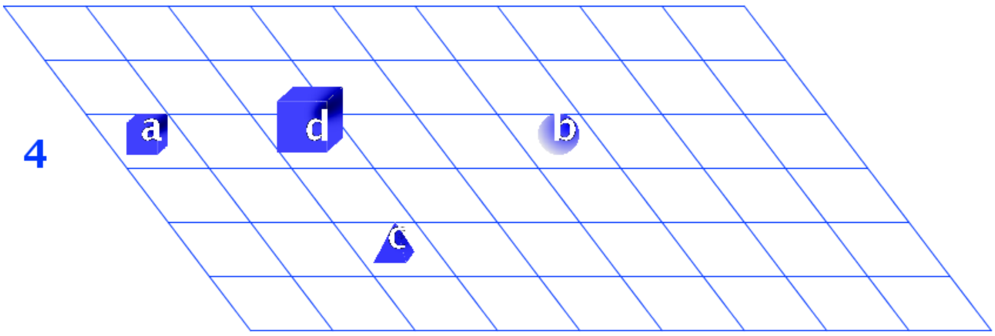
c) Hay un cubo grande.

d) Un cubo grande está a la izquierda de `b`.

e) Algo que está a la izquierda de `b` está detras de `c`.

f) Alguna esfera no es grande.

3. Utilizando `ithaca` abrí el archivo `mundo2.itk`, que se muestra a continuación:



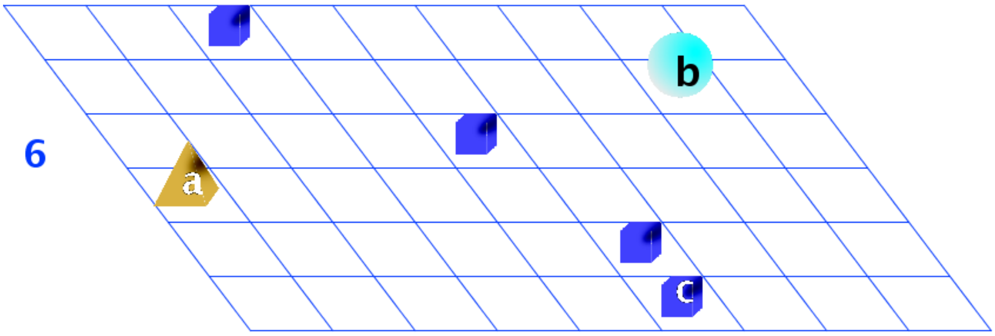
Notá que todos los enunciados del ejercicio anterior se satisfacen en este mundo. Luego,

a) Introducí tus formalizaciones de los enunciados y verificá que se satisfagan. Si no es así, te equivocaste en algo ¿podés encontrar donde está el error de la traducción?

b) Mové el cubo grande a la esquina trasera derecha del tablero. Observá que los enunciados d, e, g y j no se satisfacen mientras que los restantes siguen valiendo. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

c) A partir del mundo original, mové c hacia atrás por su propia columna hasta la fila final y hacé grande a b. Ahora los enunciados f, g y h no se satisfacen. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

4. Utilizando `ithaca` abrí el archivo `mundo3.itk`, que se muestra a continuación:



a) Formalizá los siguientes enunciados y verificá que se satisfacen. Si no es así, te equivocaste en algo ¿podés encontrar donde está el error de la traducción?

1) Todos los cubos son pequeños.
2) Cada cubo pequeño está a la derecha de a.
3) Todas las esferas son grandes.
4) a está a la izquierda de toda esfera.
5) Cada cubo está o bien delante de b o detrás de a.
6) Todo cubo está a la derecha de a y a la izquierda de b.
7) Todo lo que es más pequeño que a es un cubo.
8) Ninguna esfera es pequeña.
9) Si algo es un cubo, entonces está a la derecha de a y a la izquierda de b.

b) Mové a hacia la esquina trasera derecha del tablero. Observá que los enunciados $2, 4, 5, 6$ y 9 no se satisfacen mientras que los restantes siguen valiendo. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

c) Abrí el archivo `mundo4.itk`. Observá que los enunciados $2, 3, 4$ y 7 se satisfacen mientras que los restantes no. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

d) Abrí el archivo `mundo5.itk`. Observá que los enunciados $2, 3, 4, 7$ y 8 se satisfacen, mientras que los restantes no. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

5. Construí un *único* modelo como los de `ithaca`, en el que se satisfagan, simultáneamente, las siguientes propiedades

a) $\langle \forall x : \mathit{esfera}.x : \mathit{rojo}.x \equiv \mathit{grande}.x \rangle$

b) $\langle \exists x :: \langle \exists y : \neg(x = y) : \mathit{grande}.x \equiv (\neg \mathit{rojo}.y) \rangle \rangle$

c) $\langle \forall x : \neg \mathit{esfera}.x : \langle \exists y :: \mathit{esfera}.y \wedge \mathit{rojo}.y \rangle \rangle$

d) $\langle \forall x : \mathit{grande}.x : \langle \forall y :: (\neg \mathit{rojo}.y) \equiv \mathit{pirámide}.y \rangle \rangle$

Para evitar confusiones, dar un dibujo del modelo, nombrando todos los elementos, y luedo indicar, para cada elemento qué propiedades (forma, color, tamaño) tiene. Ejemplo "e_1 es esfera, roja, grande".

6. Construí un único modelo como los de `ithaca`, en el que se satisfagan, simultáneamente, las siguientes propiedades:

   a) $\langle \forall x : \neg rojo.x \vee pirámide.x : \langle \exists y : (x = y) : grande.y \rangle \rangle$
   b) $\langle \exists x : rojo.x : \langle \exists y :: rojo.x \equiv \neg rojo.y \rangle \rangle$
   c) $\langle \forall x : cubo.x : \langle \exists y : \neg(x = y) : pirámide.y \rangle \rangle$
   d) $\langle \forall x : rojo.x : cubo.x \wedge \langle \exists y :: grande.x \rangle \rangle$

   Para evitar confusiones, dibujá el modelo nombrando cada figura, y luedo indicá las propiedades (forma, color, tamaño) que cada una tiene. Por ejemplo "e_1 es pirámide, roja, grande".

Interpretación y formalización de enunciados en lógica de predicados

7. Expresá el significado de cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural. Por ejemplo, en la fórmula

$$\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < \#xs \,:\, xs.i = 0 \rangle$$

   debemos suponer que la variable xs es de tipo lista, para que el tipado sea correcto. Las siguientes sentencias son todas traducciones de esta fórmula al lenguaje natural:

   "Todos los elementos de la lista xs son ceros"
   "La lista xs está compuesta únicamente por ceros"
   "La lista xs no tiene otro valor que cero"...

   a) $\langle \forall x \,:\, x \in Num \,:\, \langle \exists y \,:\, y \in Int \,:\, x < y \rangle \rangle$
   b) $\langle \exists x \,:\, x \in Num \,:\, \langle \forall y \,:\, y \in Int \,:\, x < y \rangle \rangle$ ¿Es lo mismo que el anterior?
   c) $\langle \forall x, z \,:\, x, z \in Num \wedge x \neq z \,:\, \langle \exists y \,:\, y \in Num \,:\, x < y < z \rangle \rangle$.
   d) $\langle \forall p, q \,:\, 0 \leqslant p \wedge 0 \leqslant q \wedge p + q = \#xs - 1 \,:\, xs.p = xs.q \rangle$.
   e) $N \leqslant \#xs \wedge \langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < N \,:\, xs.i = 0 \rangle$
   f) $\langle \exists N \,:\, N \leqslant \#xs \,:\, \langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < N \,:\, xs.i \geqslant 0 \rangle \rangle$
   g) $\#xs = \#ys \Rightarrow \langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < \#xs \min \#ys \,:\, xs.i \neq ys.i \rangle$.

8. Formalizá las siguientes sentencias escritas en lenguaje natural, utilizando cuantificadores y predicados arbitrarios para aquellas propiedades elementales. Por ejemplo, para la sentencia "Hay enteros pares" puede formalizarse con la fórmula:

$$\langle \exists x \,:\, entero.x \,:\, x \bmod 2 = 0 \rangle$$

   a) Todo entero es par o impar.
   b) El producto de dos impares es impar.
   c) Existe un entero no negativo más chico.
   d) Dados dos números enteros positivos, existe un tercer entero tal que el primer entero multiplicado por el tercer entero es mayor que el segundo entero.
   e) Un entero positivo es primo si y sólo si, ningún número distinto de él y de 1 lo divide.
   f) x está en la lista xs.
   g) x ocurre exactamente dos veces en xs.
   h) La lista xs consiste de 0's y 1's.
   i) Si el 1 está en xs, entonces también el 0 está.
   j) Si xs es no vacía, su primer elemento es 0.
   k) Todos los elementos de xs son iguales
   l) Las listas xs e ys tienen los mismos elementos.

m) Todos los elementos de xs tienen al menos un elemento. ¿Cuál debe ser el tipo de xs?

n) La lista xs es capicúa.

ñ) n es el menor entero par en xs.

o) x es el segundo valor más grande de xs.

p) La lista xs está ordenada de manera decreciente.

q) xs es un segmento de ys.

r) El último elemento de xs es 10.

s) Si xs es creciente, entonces el primer elemento es el menor.

t) Todos los elementos de la lista son distintos.

u) Hay un elemento de la lista xs que es mayor estricto a todos los otros.

v) El primer elemento de xs es el máximo.

w) xs incluye todos los ceros de la función f.

x) xs e ys tienen un segmento no vacío en común.

y) zs es el mayor segmento común entre xs e ys.

9. Dada xs una lista de naturales, los siguientes gráficos describen ciertas propiedades sobre xs. Escribí para cada uno, una fórmula que especifique cada propiedad.

a)

0	k	$\#xs$
$\geqslant x$	$= x$	

b)

0	k $\#xs$
creciente	

c)

0	k $\#xs$
$> x$	$\leqslant x$

Demostraciones de lógica de predicados

En los siguientes ejercicios se deben hacer demostraciones en el Cálculo de Predicados, utilizando los axiomas y teoremas sobre cuantificadores, además de los axiomas y teoremas del Cálculo Proposicional que venimos utilizando.

10. Demostrá justificando cada paso *únicamente* con axiomas, los siguientes teoremas sobre el cuantificador existencial:

a) *Intercambio entre rango y término:* $\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \equiv \langle \exists x :: R.x \wedge T.x \rangle$.

b) *Distributividad de* $\wedge$ *con* $\exists$*:* $X \wedge \langle \exists x :: T.x \rangle \equiv \langle \exists x :: X \wedge T.x \rangle$, siempre que x no ocurra en X.

c) *Distributividad de* $\vee$ *con* $\exists$*:* $\langle \exists x :: T.x \rangle \vee \langle \exists x :: U.x \rangle \equiv \langle \exists x :: T.x \vee U.x \rangle$.

d) *Rango unitario:* $\langle \exists x : x = Y : T.x \rangle \equiv T.Y$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

e) *Intercambio de cuantificadores:* $\langle \exists x :: \langle \exists y :: T.x.y \rangle \rangle \equiv \langle \exists y :: \langle \exists x :: T.x.y \rangle \rangle$.

f) *Rango vacío:* $\langle \exists x : \mathit{False} : T.x \rangle \equiv \mathit{False}$.

g) *Testigo:* $T.Y \Rightarrow \langle \exists x :: T.x \rangle$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

h) Enunciá y demostrá la propiedad de *Cambio de Variable* para el cuantificador existencial.

11. Demostrá que las siguientes fórmulas son válidas, justificando en cada paso el axioma o teorema del Cálculo de Predicados utilizado.

En este tipo de demostraciones podemos justificar ciertos pasos utilizando teoremas que involucren $\Rightarrow$, por ejemplo *debilitamiento de* $\wedge$, *modus ponens*, *modus tollens*, y otros que demostremos para una situación particular. Además podemos utilizar la **monotonía de** $\forall$ **y el** $\exists$ para aplicar estos teoremas dentro de una expresión cuantificada, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} & \langle \forall x : R.x : T.x \rangle \\ \Rightarrow & \{ \text{ Monotonía y } T.x \Rightarrow S.x \ \} \\ & \langle \forall x : R.x : S.x \rangle \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \langle \exists x : R.x : T.x \rangle \\ \Rightarrow & \{ \text{ Monotonía y } T.x \Rightarrow S.x \ \} \\ & \langle \exists x : R.x : S.x \rangle \end{array}$$

con lo cual se demuestra $\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : R.x : S.x \rangle$ por un lado, y $\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : R.x : S.x \rangle$ por otro, siempre que $T.x \Rightarrow S.x$ esté demostrado.

a) $\langle \forall x : \mathit{esfera}.x : \mathit{grande}.x \rangle \equiv \langle \forall x : \neg \mathit{grande}.x : \neg \mathit{esfera}.x \rangle$

b) $\langle \exists x : \mathit{cubo}.x : \mathit{pequeño}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : \mathit{cubo}.x \rangle$

c) $\neg \langle \exists x : : \mathit{pirámide}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : \mathit{piramide}.x : \mathit{roja}.x \rangle$

d) $\langle \exists x : : \mathit{cubo}.x \rangle \wedge \langle \forall y : : \mathit{grande}.y \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : \mathit{cubo}.x \wedge \mathit{grande}.x \rangle$

En todos los items anteriores, ¿es posible cambiar los predicados *esfera*, *grande*, *cubo*, etc. por predicados arbitrarios R, T, S, etc. manteniendo la validez de las fórmulas? Dicho de otro modo ¿la validez de las formulas anteriores depende de los predicados específicos *esfera*, *grande*, *cubo*, etc?

12. La siguiente secuencia de pasos:

$$\begin{array}{ll} & \neg\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \\ \equiv & \{ \text{ Intercambio (dos veces) } \} \\ & \neg\langle \exists x : T.x : R.x \rangle \\ \equiv & \{ \text{ De Morgan (generalizado) } \} \\ & \langle \forall x : T.x : \neg R.x \rangle \\ \equiv & \{ \text{ Intercambio } \} \\ & \langle \forall x : : T.x \Rightarrow \neg R.x \rangle \\ \Rightarrow & \{ \text{ Debilitamiento (ej. } 13g) \ \} \\ & \langle \exists x : : T.x \Rightarrow \neg R.x \rangle \\ \equiv & \{ \text{ Intercambio } \} \\ & \langle \exists x : T.x : \neg R.x \rangle \end{array}$$

pretende ser una demostración de la validez de la fórmula:

$$\neg\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : T.x : \neg R.x \rangle$$

a) Decidí si efectivamente es una demostración correcta, verificando que cada paso esté justificado apropiadamente.

b) Independientemente de la corrección de la demostración ¿la fórmula enunciada es válida?

13. Demostrá los siguientes teoremas:

a) $\langle \forall x : : T.x \rangle \wedge X \equiv \langle \forall x : : T.x \wedge X \rangle$, siempre que x no ocurra en X.

b) $\langle \forall x : \langle \exists y : : R.x.y \rangle : T.x \rangle \equiv \langle \forall x, y : R.x.y : T.x \rangle$

c) $\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \wedge \langle \forall x : R.x : S.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : R.x : T.x \wedge S.x \rangle$

d) $\langle \forall x : : T.x \equiv \neg S.x \rangle \Rightarrow (\langle \exists x : : T.x \rangle \equiv \neg\langle \forall x : : S.x \rangle)$

e) $\langle \exists x : : T.x \Rightarrow S.x \rangle \equiv (\langle \forall x : : T.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : S.x \rangle)$

f) $(\langle \exists x : : T.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : S.x \rangle) \Rightarrow \langle \forall x : T.x : S.x \rangle$

g) $\langle \forall x : : T.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : T.x \rangle$ ¿la fórmula recíproca (es decir, cambiando $\Rightarrow$ por $\Leftarrow$) es válida?

h) $\langle \forall x, y, z : R.x.y \wedge R.y.z : R.x.z \rangle \wedge \langle \forall x : : \neg R.x.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x, y : R.x.y : \neg R.y.x \rangle)$

i) $\langle \exists x : : P.x \rangle \wedge \langle \forall x : P.x : P.(f.x) \rangle \Rightarrow \langle \exists x : : P.(f.(f.x)) \rangle$

j) $\langle \forall x : : P.x.(f.x) \vee P.(f.x).x \rangle \wedge \langle \forall x, y : P.x.y : P.(f.x).(f.y) \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : \langle \exists y : : P.(f.x).y \rangle \rangle$

k) $\langle \forall x : : \langle \exists y : : P.x.y \Rightarrow Q.x \rangle \rangle \wedge \langle \forall x, y : : P.x.y \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : Q.x \rangle$

14. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una demostración, ejemplo o contraejemplo.

    Ayuda: Podés usar `ithaca` para definir mundos que sirvan como ejemplo de satisfacción de una fórmula, o (contra)ejemplo de invalidez de una fórmula.

    a) $\langle \forall x : cubo.x : peque\tilde{n}o.x\rangle \Rightarrow (\langle \forall x :: cubo.x\rangle \Rightarrow \langle \forall x :: peque\tilde{n}o.x\rangle)$

    b) $\langle \forall x : cubo.x : peque\tilde{n}o.x\rangle \Leftarrow (\langle \forall x :: cubo.x\rangle \Rightarrow \langle \forall x :: peque\tilde{n}o.x\rangle)$

    c) $(\langle \forall x : esfera.x : grande.x\rangle \equiv \langle \forall x : esfera.x : roja.x\rangle) \Rightarrow \langle \forall x : esfera.x : grande.x \equiv roja.x\rangle$

    d) $(\langle \forall x : esfera.x : grande.x\rangle \equiv \langle \forall x : esfera.x : roja.x\rangle) \Leftarrow \langle \forall x : esfera.x : grande.x \equiv roja.x\rangle$

    e) $\langle \exists x : pir\acute{a}mide.x : grande.x\rangle \wedge \langle \exists x : pir\acute{a}mide.x : azul.x\rangle \Rightarrow \langle \exists x : p\acute{\imath}r\acute{a}mide.x : grande.x \wedge azul.x\rangle$

    f) $\langle \exists x : pir\acute{a}mide.x : grande.x\rangle \wedge \langle \exists x : pir\acute{a}mide.x : azul.x\rangle \Leftarrow \langle \exists x : p\acute{\imath}r\acute{a}mide.x : grande.x \wedge azul.x\rangle$

Aplicaciones del Cálculo de Predicados

Como vimos en la Guía 4, el ***análisis de razonamientos lógicos*** *busca determinar si un razonamiento, normalmente descripto en lenguaje natural, es válido o no, es decir, si la conclusión se desprende lógicamente de las hipótesis. Muchos razonamientos, dada su complejidad, no pueden ser modelados en lógica proposicional y resulta necesario utilizar lógica de predicados para lograr modelarlos de forma mas precisa.*

Independientemente de la lógica que utilicemos para modelar un razonamiento con hipótesis (o premisas) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *y conclusión* C*, decimos que es válido si la fórmula* $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ *es un teorema. Nada importa en este caso si la conclusión por si misma es verdad o no* en el mundo real. *Lo único que interesa al razonamiento es si es posible deducir la conclusión a partir de las hipótesis y las reglas de la lógica.*

Por el contrario, para mostrar la invalidez de un razonamiento es necesario encontrar un ejemplo que contradiga al razonamiento (contraejemplo), esto es, alguna situación (o ***modelo****) que cumpla con todas las premisas pero no con la conclusión. Esto muestra que no necesariamente la conclusión se deduce de las hipótesis.*

Si tomamos como ejemplo el siguiente razonamiento (válido):

P_1 : *Ningún argentino tiene derecho a cortar las calles.*
P_2 : *Los ruralistas tienen derecho a cortar las calles.*
C : *Por lo tanto los ruralistas no son argentinos.*

y definimos los siguientes predicados:

$A.x \doteq x$ *es argentino*
$D.x \doteq x$ *tiene derecho a cortar las calles*
$R.x \doteq x$ *es ruralista*

podemos formalizarlo con la fórmula:

$$\langle \forall x : A.x : \neg D.x\rangle \wedge \langle \forall x : R.x : D.x\rangle \Rightarrow \langle \forall x : R.x : \neg A.x\rangle$$

Veamos que es un teorema:

$\quad \underline{\langle \forall x : A.x : \neg D.x\rangle} \wedge \underline{\underline{\langle \forall x : R.x : D.x\rangle}}$
$\equiv$ { *Intercambio rango y término (dos veces)* }
$\quad \langle \forall x :: A.x \Rightarrow \neg D.x\rangle \wedge \langle \forall x :: R.x \Rightarrow D.x\rangle$
$\equiv$ { *separación del término* }
$\quad \langle \forall x :: \underline{(A.x \Rightarrow \neg D.x) \wedge (R.x \Rightarrow D.x)}\rangle$
$\Rightarrow$ { ***Teorema 1:*** $(p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$, *y Monotonía del* $\forall$ }
$\quad \langle \forall x :: R.x \Rightarrow \neg A.x\rangle$
$\equiv$ { *Intercambio rango y término* }
$\quad \langle \forall x : R.x : \neg A.x\rangle$

Demostración del ***Teorema 1:***

$\quad \underline{(p \Rightarrow \neg q)} \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$
$\equiv$ { *Contrarrecíproca* }
$\quad \underline{(q \Rightarrow \neg p) \wedge (r \Rightarrow q)} \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$
$\equiv$ { *Conmutatividad de* $\wedge$ }
$\quad (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$
$\equiv$ { *Transitividad de* $\Rightarrow$ }
$\quad$ *True*

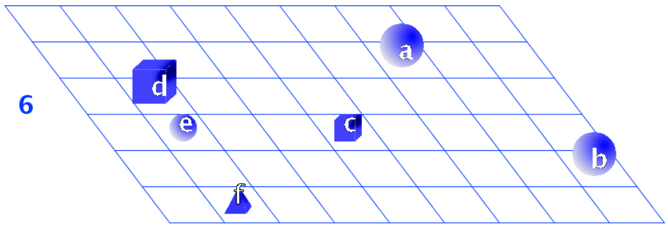
Ahora veamos el caso de un razonamiento no válido, por ejemplo:

P_1 : *Todo cubo está a la izquierda de* `a`*.*
P_2 : `e` *está a la izquierda de* `a`*.*
C: *Por lo tanto* `e` *es un cubo.*

que podemos formalizar como:

$$\langle \forall x : cubo.x : izquierda.x.\mathsf{a} \rangle \wedge izquierda.\mathsf{e}.\mathsf{a} \Rightarrow cubo.\mathsf{e}$$

Para mostrar su invalidez, lo único que hace falta es dar un mundo donde todos los cubos estén a la izquierda del objeto a*, el objeto* e *también esté a la izquierda de* a*, pero siendo* e *otra cosa diferente a un cubo. Un tal mundo es el siguiente:*



Finalmente, analicemos el siguiente razonamiento:

P_1 : *Todo el que ayuda a combatir la pobreza afirma que ésta es inmoral, injusta e ilegítima.*
P_2 : *La Iglesia dice que la pobreza es inmoral, injusta e ilegítima.*
C : *Por lo tanto, la Iglesia ayuda a combatir la pobreza*

Alguien que crea que efectivamente la Iglesia combate la pobreza podría estar tentado de afirmar que el razonamiento es válido. Sin embargo, como dijimos antes, no importa si la conclusión realmente verdadera o no, sino solamente, si la conclusión se puede deducir de la información provista por las hipótesis. Análogamente alguien con la posición contraria podría afirmar que el razonamiento no es válido porque efectivamente la Iglesia NO combate la pobreza. Pero esto sería incurrir en el mismo tipo de error.

Lo que es relevante para este razonamiento es que las hipótesis permiten tanto la situación en que la Iglesia combate la pobreza como la situación contraria. Es **la posibilidad** *de que la Iglesia no combata la pobreza (independientemente de que esto ocurra o no en la realidad) lo que convierte al razonamiento en inválido. Mas formalmente, si utilizamos $R.x$ para "x combate la pobreza", y $T.x$ para "afirma que la pobreza es inmoral, . . . ", el razonamiento se escribe como:*

$$\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \wedge T.\mathsf{iglesia} \Rightarrow R.\mathsf{iglesia}$$

Claramente puede darse el caso $\neg R.\mathsf{iglesia}$ que no contradice las hipótesis, pero si la conclusión.

Como no es posible utilizar el conocimiento del mundo real para deducir la validez o no de un razonamiento, sino sólo la información de las hipótesis, el significado concreto de cada predicado no es relevante. Lo único que interesa en el análisis del razonamiento es la **forma** *del mismo.*

Notemos que este razonamiento tiene la misma **forma** *que el ejemplo anterior, tomando $R.x = cubo.x$ y $T.x = izquierda.x.\mathsf{a}$. De hecho el contraejemplo anterior nos sirve también en este caso. En general, siempre que el razonamiento sea no válido, es posible "traducir" el razonamiento a otro dominio como el de las figuras geométricas de* `ithaca`*, donde sea mas fácil dar un contraejemplo.*

Los siguientes ejercicios tratan sobre el análisis de razonamientos utilizando el Cálculo de Predicados.

15. Demostrá que los siguientes razonamientos son válidos:

    a) Algún cubo es azul, por lo tanto algo azul es un cubo.

    b) Ningún cubo es grande, por lo tanto nada grande es un cubo.

    c) Si algunas pirámides no están a la izquierda de a, entonces existe alguna pirámide.

    d) No existe ningún cubo blanco, por lo tanto todo cubo blanco tiene pintitas rosas.

    e) Todos las esferas son grandes y rojas. Existen esferas con pintitas rosas. Luego, existe algo grande que tiene pintitas rosas.

    f) No existe ningún unicornio, por lo tanto todo unicornio tiene dos cuernos.

g) Todos los directivos del FMI son corruptos y mentirosos. Existen directivos del FMI inútiles. Luego, existen corruptos inútiles.

¿Encontrás alguna relación entre los razonamientos d y f? ¿y entre e y g?

16. Formalizá y analizá los siguientes razonamientos, y decidí si son válidos o no. Justificá a través de una demostración o contraejemplo.

    a) Todo cubo es azul. `a` no es un cubo. Luego `a` no es azul.

    b) Todos los artistas son ególatras, algunos artistas son indigentes, luego algunos indigentes son ególatras.

    c) Todos los anarquistas son partidarios de la fuerza y la violencia, todos los militaristas son partidarios de la fuerza y la violencia, luego todos los militaristas son anarquistas.

    d) Ningún ateo tiene fe en el Señor, pero todos los que tienen fe en el Señor son hombres sabios, por lo tanto, ningún ateo es un hombre sabio.

    e) Todo hombre es mamífero, algunos animales no son mamíferos, por lo tanto algunos animales no son hombres.

    f) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, algunos pájaros no son hombres.

    g) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, ningún pájaro es hombre.

    h) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son mamíferos. Por lo tanto, ningún mamífero es hombre.

    i) Algunos hombres no son corruptos. Todos los políticos son corruptos. Por lo tanto, algunos hombres no son políticos.

    j) Todo aquel que tome cianuro, se morirá. La abuela no ha tomado cianuro, luego no morirá.