Introducción a los Algoritmos - 1er. cuatrimestre 2012

Guía 5: Semántica de Lógica de Predicados

Docentes: Araceli Acosta, Javier Blanco, Paula Estrella, Pedro Sánchez Terraf

La lógica de predicados o lógica de primer orden es el sistema lógico estándar que formaliza el sistema deductivo natural. El objetivo general de esta guía es aprender a utilizar fórmulas con cuantificadores universales ($\forall$) y existenciales ($\exists$), tanto para interpretar su significado, como para utilizarlas para expresar propiedades y modelar problemas de razonamiento.

Interpretación y construcción de modelos en Lógica de Predicados

La Lógica de Predicados cuenta con todos los operadores de la Lógica Proposicional ($\equiv$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, etcétera) e incorpora dos nuevos ***operadores de cuantificación****. Por ejemplo, sea el predicado $T.x$, definido como*

$$T.x \doteq x \text{ es múltiplo de 3}$$

el ***cuantificador universal*** *$\forall$ permite expresar que todo x es múltiplo de 3. Esto se denota por $\langle \forall x : : T.x \rangle$. En general, el cuantificador universal indica que la propiedad es satisfecha por todos los valores de la variable. El* ***cuantificador existencial*** *$\exists$, expresa que la propiedad es satisfecha por al menos un valor de x. Por ejemplo $\langle \exists x : : T.x \rangle$ indica que existe un x que es múltiplo de 3. El conjunto de valores sobre el que la propiedad expresada se evalúa se especifica en el* ***rango*** *de la fórmula. Mientras que la propiedad se expecifica en el* ***término****. El rango y el término se escriben en las siguientes ubicaciones:*

$$\langle \forall x : rango.x : termino.x \rangle \qquad \langle \exists x : rango.x : termino.x \rangle$$

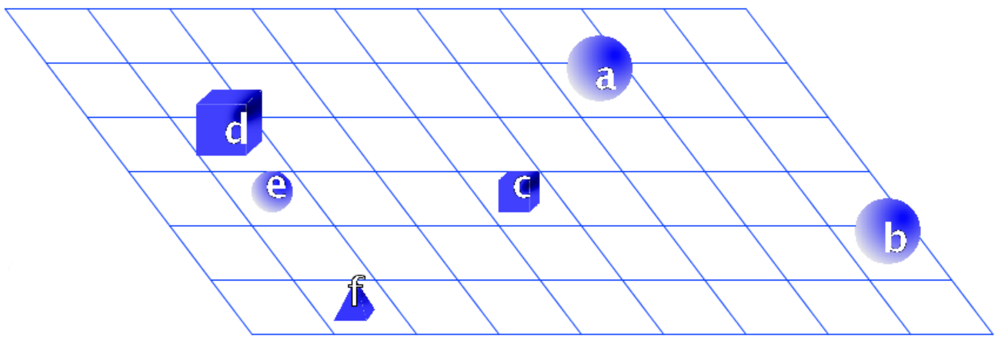
Por ejemplo, el enunciado "Todos los naturales son enteros" se formaliza como:

$$\langle \exists x : naturales.x : enteros.x \rangle$$

dado que el enunciado sólo se evalúa sobre el conjunto de naturales (y no de los reales, por ejemplo).

El objetivo de los siguientes ejercicios es clarificar el significado de los nuevos operadores de cuantificación, para lograr la capacidad de leer y escribir fórmulas que los involucran.

1. Dado el siguiente mundo



decidí si las siguientes sentencias son satisfechas o no (y por qué). Por ejemplo, la sentencia "Hay un cubo grande" se satisface por el objeto `d`. Sin embargo, la frase "Todas las esferas son grandes", no se satisface a causa de la esfera pequeña `e`.

a) `f` está entre `d` y `e`.

b) Todas las pirámides son pequeñas.

c) Existe (al menos) un cubo pequeño.

d) `a` está a la derecha de todo.

e) Nada está a la derecha de `b`.

2. Construí un mundo en el que se satisfagan progresivamente cada una de las siguientes sentencias, utilizando cubos, esferas y pirámides, pequeños o grandes.

   a) Algo es grande.

   b) Hay un cubo.

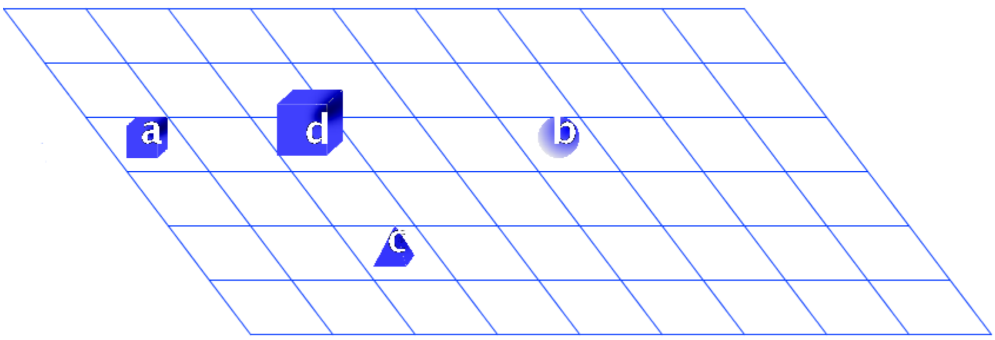
   c) Hay un cubo grande.

   d) Un cubo grande está a la izquierda de `b`.

   e) Algo que está a la izquierda de `b` está detras de `c`.

   f) Alguna esfera no es grande.

3. Utilizando `ithaca` abrí el archivo `mundo2.itk`, que se muestra a continuación:



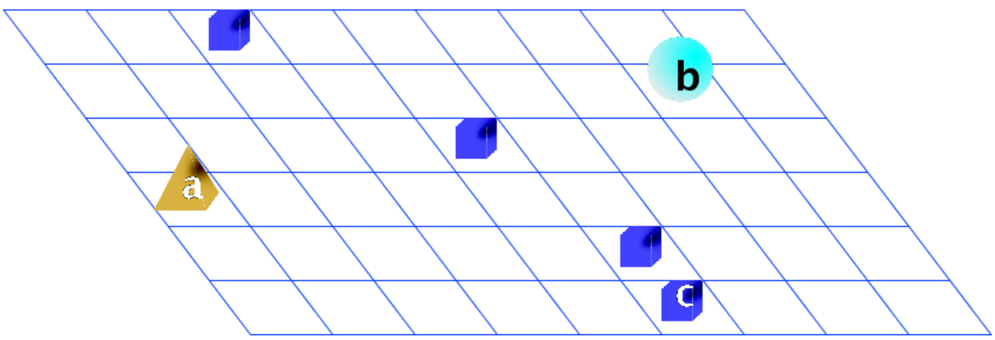
   Notá que todos los enunciados del ejercicio anterior se satisfacen en este mundo. Luego,

   a) Introducí tus formalizaciones de los enunciados y verificá que se satisfagan. Si no es así, te equivocaste en algo ¿podés encontrar donde está el error de la traducción?

   b) Mové el cubo grande a la esquina trasera derecha del tablero. Observá que el enunciado *d* no se satisface mientras que los restantes siguen valiendo. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

   c) A partir del mundo original, mové *c* hacia atrás por su propia columna hasta la fila final y hacé grande a *b*. Ahora los enunciados *e* y *f* no se satisfacen. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

4. Utilizando `ithaca` abrí el archivo `mundo3.itk`, que se muestra a continuación:



a) Formalizá los siguientes enunciados y verificá que se satisfacen. Si no es así, te equivocaste en algo ¿podés encontrar donde está el error de la traducción?

1) Todos los cubos son pequeños.
2) Cada cubo pequeño está a la derecha de `a`.
3) Todas las esferas son grandes.
4) `a` está a la izquierda de toda esfera.
5) Cada cubo está o bien delante de `b` o detrás de `a`.
6) Todo cubo está a la derecha de `a` y a la izquierda de `b`.
7) Todo lo que es más pequeño que `a` es un cubo.
8) Ninguna esfera es pequeña.
9) Si algo es un cubo, entonces está a la derecha de `a` y a la izquierda de `b`.

b) Mové `a` hacia la esquina trasera derecha del tablero. Observá que los enunciados $2, 4, 5, 6$ y 9 no se satisfacen mientras que los restantes siguen valiendo. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

c) Abrí el archivo `mundo4.itk`. Observá que los enunciados $2, 3, 4$ y 7 se satisfacen mientras que los restantes no. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

d) Abrí el archivo `mundo5.itk`. Observá que los enunciados $2, 3, 4, 7$ y 8 se satisfacen, mientras que los restantes no. Verificá que lo mismo ocurra con tus formalizaciones.

5. Construí un *único* modelo como los de `ithaca`, en el que se satisfagan, simultáneamente, las siguientes propiedades

   a) $\langle \forall x : \mathit{esfera}.x : \mathit{rojo}.x \equiv \mathit{grande}.x \rangle$

   b) $\langle \exists x :: \langle \exists y : \neg(x = y) : \mathit{grande}.x \equiv (\neg \mathit{rojo}.y) \rangle \rangle$

   c) $\langle \forall x : \neg \mathit{esfera}.x : \langle \exists y :: \mathit{esfera}.y \wedge \mathit{rojo}.y \rangle \rangle$

   d) $\langle \forall x : \mathit{grande}.x : \langle \forall y :: (\neg \mathit{rojo}.y) \equiv \mathit{pirámide}.y \rangle \rangle$

   Para evitar confusiones, dar un dibujo del modelo, nombrando todos los elementos, y luedo indicar, para cada elemento qué propiedades (forma, color, tamaño) tiene. Ejemplo "e_1 es esfera, roja, grande".

6. Construí un único modelo como los de `ithaca`, en el que se satisfagan, simultáneamente, las siguientes propiedades:

   a) $\langle \forall x : \neg \mathit{rojo}.x \vee \mathit{pirámide}.x : \langle \exists y : (x = y) : \mathit{grande}.y \rangle \rangle$

   b) $\langle \exists x : \mathit{rojo}.x : \langle \exists y :: \mathit{rojo}.x \equiv \neg \mathit{rojo}.y \rangle \rangle$

   c) $\langle \forall x : \mathit{cubo}.x : \langle \exists y : \neg(x = y) : \mathit{pirámide}.y \rangle \rangle$

   d) $\langle \forall x : \mathit{rojo}.x : \mathit{cubo}.x \wedge \langle \exists y :: \mathit{grande}.x \rangle \rangle$

   Para evitar confusiones, dibujá el modelo nombrando cada figura, y luedo indicá las propiedades (forma, color, tamaño) que cada una tiene. Por ejemplo "e_1 es pirámide, roja, grande".

Interpretación y formalización de enunciados en lógica de predicados

7. Expresá el significado de cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural. Por ejemplo, en la fórmula

$$\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < \#xs \,:\, xs.i = 0 \rangle$$

debemos suponer que la variable xs es de tipo lista, para que el tipado sea correcto. Las siguientes sentencias son todas traducciones de esta fórmula al lenguaje natural:

"Todos los elementos de la lista xs son ceros"
"La lista xs está compuesta únicamente por ceros"
"La lista xs no tiene otro valor que cero"...

a) $\langle \forall x : x \in Num : \langle \exists y : y \in Int : x < y \rangle \rangle$

b) $\langle \exists x : x \in Num : \langle \forall y : y \in Int : x < y \rangle \rangle$ ¿Es lo mismo que el anterior?

c) $\langle \forall x, z : x, z \in Num \wedge x < z : \langle \exists y : y \in Num : x < y < z \rangle \rangle$.

d) $\langle \forall p, q : 0 \leqslant p \wedge 0 \leqslant q \wedge p + q = \#xs - 1 : xs.p = xs.q \rangle$.

e) $N \leqslant \#xs \wedge \langle \exists i : 0 \leqslant i < N : xs.i = 0 \rangle$

f) $\langle \exists N : N \leqslant \#xs : \langle \forall i : 0 \leqslant i < N : xs.i \geqslant 0 \rangle \rangle$

g) $\#xs = \#ys \Rightarrow \langle \exists i : 0 \leqslant i < \#xs \min \#ys : xs.i \neq ys.i \rangle$.

8. Formalizá las siguientes sentencias escritas en lenguaje natural, utilizando cuantificadores y predicados arbitrarios para aquellas propiedades elementales. Por ejemplo, para la sentencia “Hay enteros pares” puede formalizarse con la fórmula:

$$\langle \exists x : entero.x : x \bmod 2 = 0 \rangle$$

a) Todo entero es par o impar.

b) El producto de dos impares es impar.

c) Existe un entero no negativo más chico.

d) Dados dos números enteros positivos, existe un tercer entero tal que el primer entero multiplicado por el tercer entero es mayor que el segundo entero.

e) Un entero positivo es primo si y sólo si, ningún número distinto de él y de 1 lo divide.

f) x está en la lista xs.

g) La lista xs consiste de 0’s y 1’s.

h) Si el 1 está en xs, entonces también el 0 está.

i) Todos los elementos de xs son iguales.

j) Todos los elementos de la lista son distintos.

k) La lista xs es capicúa.

l) La lista xs está ordenada de manera decreciente.

m) Las listas xs e ys tienen los mismos elementos.

n) x ocurre exactamente dos veces en xs.

ñ) n es el menor entero par en xs.

o) x es el segundo valor más grande de xs.

p) Hay un elemento de la lista xs que es mayor estricto a todos los otros.

q) El primer elemento de xs es el máximo.

r) xs incluye todos los ceros de la función f.

Satisfacción y validez de fórmulas de la lógica de predicados

En los siguientes prácticos desarrollaremos un método de prueba para asegurarnos cuándo una fórmula es válida o satisfactible. Hasta entonces, justificaremos de manera intuitiva los siguientes ejercicios.

9. Decidir si cada una de las siguientes fórmulas es válida y/o satisfactible. Utilizar ejemplos y contraejemplos para justificar.

a) $\langle \forall x : cubo.x : pequeño.x \rangle \Rightarrow (\langle \forall x : : cubo.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : pequeño.x \rangle)$

b) $\langle \forall x : cubo.x : pequeño.x \rangle \Leftarrow (\langle \forall x : : cubo.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : : pequeño.x \rangle)$

c) $(\langle \forall x : esfera.x : grande.x \rangle \equiv \langle \forall x : esfera.x : roja.x \rangle) \Rightarrow \langle \forall x : esfera.x : grande.x \equiv roja.x \rangle$

d) $(\langle \forall x : esfera.x : grande.x \rangle \equiv \langle \forall x : esfera.x : roja.x \rangle) \Leftarrow \langle \forall x : esfera.x : grande.x \equiv roja.x \rangle$

e) $\langle \exists x : pirámide.x : grande.x \rangle \wedge \langle \exists x : pirámide.x : azul.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : pírámide.x : grande.x \wedge azul.x \rangle$

f) $\langle \exists x : pirámide.x : grande.x \rangle \wedge \langle \exists x : pirámide.x : azul.x \rangle \Leftarrow \langle \exists x : pírámide.x : grande.x \wedge azul.x \rangle$