Introducción a los Algoritmos - 1er. cuatrimestre 2012

Guía 7: Cálculo de Predicados

Docentes: Araceli Acosta, Javier Blanco, Paula Estrella, Pedro Sánchez Terraf

La lógica de predicados o lógica de primer orden es el sistema lógico estándar que formaliza el sistema deductivo natural. El objetivo general de esta guía es aprender a manipular fórmulas con cuantificadores universal ($\forall$) *y existencial* ($\exists$) *extendiendo las habilidades logradas en el cálculo proposicional, para realizar demostraciones formales en este sistema lógico.*

Demostraciones de lógica de predicados

En los siguientes ejercicios se deben hacer demostraciones en el Cálculo de Predicados, utilizando los axiomas y teoremas sobre cuantificadores, además de los axiomas y teoremas del Cálculo Proposicional que venimos utilizando.

1. Evaluar las siguientes expresiones usando los axiomas de cuantificadores:

   a) $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, [0,2,4,1].i \ \ \text{mód}\ 2 = 0 \rangle$.

   b) $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 4 \,:\, [0,2,4,1].i \ \ \text{mód}\ 2 = 0 \rangle$.

2. Justificar las respuestas de estos ejercicios usando los axiomas.

   a) Evaluar $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, \langle \forall j \,:\, 0 \leqslant j < 3 \,:\, [0,2,1].i = [0,2,1].j \rangle\rangle$.

   b) Decidir si la fórmula $\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, \langle \forall j \,:\, 0 \leqslant j < 3 \,:\, xs.i = xs.j \rangle\rangle$ es satisfactible.

   c) Encontrar valores de x e y que satisfagan la siguiente fórmula:

   $$\langle \forall i \,:\, 0 \leqslant i < 4 \,:\, [0,x,2,y,6].i < [0,x,2,y,6].(i+1) \rangle.$$

3. Demostrá justificando cada paso los siguientes teoremas sobre el cuantificador existencial:

   a) *Distributividad de* $\vee$ *con* $\exists$*:* $\langle \exists x \,:\,:\, T.x \rangle \vee \langle \exists x \,:\,:\, U.x \rangle \equiv \langle \exists x \,:\,:\, T.x \vee U.x \rangle$.

   b) *Rango unitario:* $\langle \exists x \,:\, x = Y \,:\, T.x \rangle \equiv T.Y$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

   c) *Partición de rango para* $\exists$*:* $\langle \exists x \,:\, R.x \vee S.x \,:\, T.x \rangle \equiv \langle \exists x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \vee \langle \exists x \,:\, S.x \,:\, T.x \rangle$.

   d) *Rango vacío:* $\langle \exists x \,:\, \mathit{False} \,:\, T.x \rangle \equiv \mathit{False}$.

4. Evaluar las siguientes expresiones usando los axiomas de cuantificadores y comparar con el ejercicio 1:

   a) $\langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < 3 \,:\, [0,2,4,1].i \ \ \text{mód}\ 2 = 1 \rangle$.

   b) $\langle \exists i \,:\, 0 \leqslant i < 4 \,:\, [0,2,4,1].i \ \ \text{mód}\ 2 = 1 \rangle$.

5. Sea $\mathit{elem} : A \to [A] \to \mathit{Bool}$ definida de la siguiente manera:

   $$\begin{array}{rcl} \mathit{elem}.y.[\,] & \doteq & \mathit{False} \\ \mathit{elem}.y.(x \triangleright xs) & \doteq & y = x \vee \mathit{elem}.y.xs \end{array}$$

   Describí con tus palabras qué hace esta función y evaluá las siguientes fórmulas, usando la definición de *elem* y las propiedades de los cuantificadores.

   a) $\langle \forall x \,:\, \mathit{elem}.x.[0,1,3] \,:\, x \leqslant 3 \rangle$.

   b) $\langle \exists x \,:\, \mathit{elem}.x.[0,1,3] \,:\, x \geqslant 3 \rangle$.

6. Demostrá justificando cada paso los siguientes teoremas sobre el cuantificador existencial:

   a) *Intercambio entre rango y término:* $\langle \exists x \,:\, R.x \,:\, T.x \rangle \equiv \langle \exists x \,:\,:\, R.x \wedge T.x \rangle$.

   b) *Intercambio de cuantificadores:* $\langle \exists x \,:\,:\, \langle \exists y \,:\,:\, T.x.y \rangle\rangle \equiv \langle \exists y \,:\,:\, \langle \exists x \,:\,:\, T.x.y \rangle\rangle$.

c) *Testigo:* $T.Y \Rightarrow \langle \exists x\ :\ :\ T.x \rangle$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

d) Enunciá y demostrá la propiedad de *Cambio de Variable* para el cuantificador existencial.

7. Demostrá que las siguientes fórmulas son válidas, justificando en cada paso el axioma o teorema del Cálculo de Predicados utilizado.

   a) $\langle \forall x\ :\ \mathit{esfera}.x\ :\ \mathit{grande}.x \rangle \equiv \langle \forall x\ :\ \neg \mathit{grande}.x\ :\ \neg \mathit{esfera}.x \rangle$

   b) $\langle \exists x\ :\ \mathit{cubo}.x\ :\ \mathit{peque\tilde{n}o}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x\ :\ :\ \mathit{cubo}.x \rangle$

   c) $\neg \langle \exists x\ :\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x\ :\ \mathit{roja}.x \rangle$

   d) $\langle \exists x\ :\ :\ \mathit{cubo}.x \rangle \wedge \langle \forall y\ :\ :\ \mathit{grande}.y \rangle \Rightarrow \langle \exists x\ :\ :\ \mathit{cubo}.x \wedge \mathit{grande}.x \rangle$

   En todos los items anteriores, ¿es posible cambiar los predicados *esfera*, *grande*, *cubo*, etc. por predicados arbitrarios R, T, S, etc. manteniendo la validez de las fórmulas? Dicho de otro modo ¿la validez de las formulas anteriores depende de los predicados específicos *esfera*, *grande*, *cubo*, etc?

8. *a*) Expresá en tus propias palabras lo que significan las expresiones a cada lado de $\equiv$:

   $$\langle \forall i\ :\ 0 \leqslant i < \#xs\ :\ xs.i < 0 \rangle \equiv (xs.0 < 0) \wedge \langle \forall i\ :\ 1 \leqslant i < \#xs\ :\ xs.i < 0 \rangle.$$

   b) Probá que esta equivalencia es un teorema.

9. Probar:

   $$\langle \forall i\ :\ 1 \leqslant i < \#(x \triangleright xs)\ :\ (x \triangleright xs).i < 10 \rangle \equiv \langle \forall i\ :\ 0 \leqslant i < \#xs\ :\ xs.i < 10 \rangle.$$

   Ayuda: Usar el Teorema de *Reenumeración* o *Cambio de Variable*.

10. Usando la siguiente definición de $\mathit{todosMenores10} : [\mathit{Num}] \rightarrow \mathit{Bool}$

    $$\begin{array}{rcl} \mathit{todosMenores10}.[\,] & \doteq & \mathit{True} \\ \mathit{todosMenores10}.(x \triangleright xs) & \doteq & x < 10 \wedge \mathit{todosMenores10}.xs, \end{array}$$

    probá por inducción que

    $$\mathit{todosMenores10}.xs \equiv \langle \forall i\ :\ 0 \leqslant i < \#xs\ :\ xs.i < 10 \rangle.$$

    Ayuda: Aquí te serán útiles tus soluciones de los ejercicios 8 y 9.

11. Probar por inducción en xs:

    $$\langle \forall x\ :\ \mathit{elem}.x.xs\ :\ T.x \rangle \equiv \langle \forall i\ :\ 0 \leqslant i < \#xs\ :\ T.(xs.i) \rangle.$$

12. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una demostración, ejemplo o contraejemplo.

    Ayuda: Podés usar `ithaca` para definir mundos que sirvan como ejemplo de satisfacción de una fórmula, o (contra)ejemplo de invalidez de una fórmula.

    a) $\langle \forall x\ :\ \mathit{cubo}.x\ :\ \mathit{peque\tilde{n}o}.x \rangle \Rightarrow (\langle \forall x\ :\ :\ \mathit{cubo}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x\ :\ :\ \mathit{peque\tilde{n}o}.x \rangle)$

    b) $\langle \forall x\ :\ \mathit{cubo}.x\ :\ \mathit{peque\tilde{n}o}.x \rangle \Leftarrow (\langle \forall x\ :\ :\ \mathit{cubo}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x\ :\ :\ \mathit{peque\tilde{n}o}.x \rangle)$

    c) $\langle \exists x\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x\ :\ \mathit{grande}.x \rangle \wedge \langle \exists x\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x\ :\ \mathit{azul}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x\ :\ \mathit{grande}.x \wedge \mathit{azul}.x \rangle$

    d) $\langle \exists x\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x\ :\ \mathit{grande}.x \rangle \wedge \langle \exists x\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x\ :\ \mathit{azul}.x \rangle \Leftarrow \langle \exists x\ :\ \mathit{pir\acute{a}mide}.x\ :\ \mathit{grande}.x \wedge \mathit{azul}.x \rangle$

Aplicaciones del Cálculo de Predicados

El ***análisis de razonamientos lógicos*** *busca determinar si un razonamiento, normalmente descripto en lenguaje natural, es válido o no, es decir, si la conclusión se desprende lógicamente de las hipótesis. Muchos* *razonamientos, dada su complejidad, no pueden ser modelados en lógica proposicional y resulta necesario utilizar lógica de predicados para lograr modelarlos de forma más precisa.*

Independientemente de la lógica que utilicemos para modelar un razonamiento con hipótesis (o premisas) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y conclusión C, decimos que es correcto *si la fórmula $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ es un teorema. Nada importa en este caso si la conclusión por sí misma es verdad o no en el mundo real. Lo único que interesa al razonamiento es si es posible deducir la conclusión a partir de las hipótesis y las reglas de la lógica.*

Por el contrario, para mostrar que un razonamiento no es correcto es necesario encontrar un ejemplo que contradiga al razonamiento (contraejemplo), esto es, alguna situación (o "mundo") que cumpla con todas las premisas pero no con la conclusión. Esto muestra que no necesariamente la conclusión se deduce de las hipótesis.

Los siguientes ejercicios tratan sobre el análisis de razonamientos utilizando el Cálculo de Predicados.

13. Formalizá los siguientes razonamientos:

    a) Algún cubo es azul, por lo tanto algo azul es un cubo.

    b) Ningún cubo es grande, por lo tanto nada grande es un cubo.

    c) Si algunas pirámides no están a la izquierda de `a`, entonces existe alguna pirámide.

    d) Todos las esferas son grandes y rojas. Existen esferas con pintitas rosas. Luego, existe algo grande que tiene pintitas rosas.

    e) No existe ningún unicornio, por lo tanto todo unicornio tiene dos cuernos.

    f) Todos los directivos del FMI son corruptos y mentirosos. Existen directivos del FMI inútiles. Luego, existen corruptos inútiles.

14. Formalizá y analizá los siguientes razonamientos. Decidí si son válidos o no. Justificá a través de una tabla de verdad o un contraejemplo.

    a) Todo cubo es azul. `a` no es un cubo. Luego `a` no es azul.

    b) Todos los artistas son ególatras, algunos artistas son indigentes, luego algunos indigentes son ególatras.

    c) Todos los anarquistas son partidarios de la fuerza y la violencia, todos los militaristas son partidarios de la fuerza y la violencia, luego todos los militaristas son anarquistas.

    d) Ningún ateo tiene fe en el Señor, pero todos los que tienen fe en el Señor son hombres sabios, por lo tanto, ningún ateo es un hombre sabio.

    e) Todo hombre es mamífero, algunos animales no son mamíferos, por lo tanto algunos animales no son hombres.

    f) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, algunos pájaros no son hombres.

    g) Ningún hombre tiene alas. Algunos seres alados son pájaros. Por lo tanto, ningún pájaro es hombre.

    h) Algunos hombres no son corruptos. Todos los políticos son corruptos. Por lo tanto, algunos hombres no son políticos.

    i) Todo aquel que tome cianuro, se morirá. La abuela no ha tomado cianuro, luego no morirá.