

Relación de Orden Parcial

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de **reflexividad**, **antisimetría** y **transitividad**

Notación: $a \leq b$ en lugar de $(a, b) \in R$

Relación de Orden Parcial

Ejemplos:

- 1 **Relación de orden usual** sobre \mathbb{R} (o \mathbb{Z}): Si a y b son números, entonces $a \leq b$ refleja la relación de orden dada por la representación geométrica de la recta, salvo que se diga explícitamente otra cosa.
- 2 La relación definida por $a \leq b$ si y sólo si a divide a b (sobre \mathbb{N}) es una relación de orden. También utilizamos $a|b$.
- 3 $X \leq Y$ si y sólo si $X \subseteq Y$ (sobre $\mathcal{P}(A)$) es una relación de orden

Diagramas de Hasse

Definición de la relación cubrimiento

Sea A un conjunto y \leq un orden parcial sobre A . Sean $a, b \in A$ elementos distintos. Decimos que b cubre a a si $a \leq b$ y no existe c distinto de a y b tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Definición de Diagrama de Hasse

Consiste de puntos llamados **vértices** que representan los elementos del conjunto y de **arcos** o **segmentos ascendentes** que unen pares de vértices de la siguiente manera:

a está conectado con b mediante un arco ascendente si y sólo si b cubre a a .

Conjunto Parcialmente Ordenado (CPO o POSET)

Es un par (P, \leq) donde P es un conjunto y \leq es un orden parcial sobre P

Ejemplos:

- 1 (\mathbb{R}, \leq) es un POSET
- 2 $(\mathbb{Z}, |)$ es un POSET
- 3 $(\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}, |)$ es un POSET
- 4 $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ es un POSET

Máximos y Mínimos

(P, \leq) un POSET

- a es mínimo de P si para todo x en P se tiene $a \leq x$
- a es máximo de P si para todo x en P se tiene $x \leq a$

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

- 1 (\mathbb{N}, \leq)
- 2 $([0, 1), \leq)$
- 3 $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
- 4 $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
- 5 $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

Maximales y Minimales

(P, \leq) un POSET

- a es **minimal** de P si para todo x en P , $x \leq a$ implica que $x = a$
- a es **maximal** de P si para todo x en P , $a \leq x$ implica que $a = x$

¿Cuáles de los siguientes tienen maximales y/o minimales?

- 1 (\mathbb{N}, \leq)
- 2 $([0, 1), \leq)$
- 3 $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
- 4 $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
- 5 $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

Orden Total o Cadena

Un *orden total* sobre un conjunto P es un orden parcial \leq sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Algunos ejemplos de órdenes totales:

- 1 El orden \leq en \mathbb{R}
- 2 El orden lexicográfico en un diccionario.

Supremos e Ínfimos

Sea (P, \leq) un poset y sea $S \subseteq P$.

- 1 $a \in P$ se dice *cota superior* de S si para todo $b \in S$ ocurre que $b \leq a$.
- 2 $a \in P$ se dice *cota inferior* de S si para todo $b \in S$ ocurre que $a \leq b$.
- 3 $a \in P$ se dice *supremo* de S si a es una cota superior de S y para toda cota superior b de S se cumple que $a \leq b$.
- 4 $a \in P$ se dice *ínfimo* de S si a es una cota inferior de S y para toda cota inferior b de S se cumple que $b \leq a$.

Isomorfismo de POSETS

Sean (P, \leq) , (Q, \leq') dos posets, y sea $f : P \rightarrow Q$ una función.

Diremos que f es un **isomorfismo** si f es biyectiva y para todo $x, y \in P$, se cumple que

$x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq' f(y)$

Propiedad Fundamental de los Isomorfismos

Lema

Sean (P, \leq) y (Q, \leq') posets. Sea $f : P \rightarrow Q$ un isomorfismo.

- 1 Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y sólo si existe $\sup(f(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $f(\sup(S)) = \sup(f(S))$.
- 2 Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\inf(S)$ si y sólo si existe $\inf(f(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $f(\inf(S)) = \inf(f(S))$.