Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

Clase del 29 de agosto de 2014

Álgebras de Boole

Es una estructura del tipo $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$, donde B es un conjunto no vacío, y además satisface:

1. $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo
2. Para todo $x \in B$ se tiene

$$0 \leq x \qquad x \leq 1$$

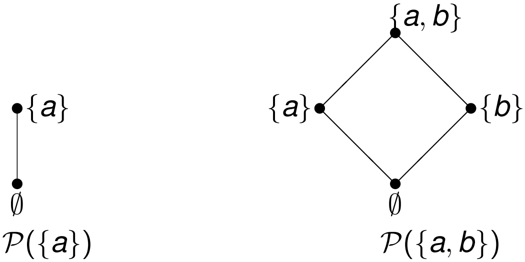
3. para cada $x \in L$, se tiene que

$$x \vee x' = 1, \qquad x \wedge x' = 0$$

Álgebra de Boole de conjuntos

Sea X un conjunto.

Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole,



Leyes de de Morgan

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole, entonces se cumple:

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

Isomorfismo de Álgebras de Boole

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge', '', 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ Álgebras de Boole. Una función $F : B \to B'$ se dice un *isomorfismo* si F es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$

$$F(x') = (F(x))''$$

$$F(0^B) = 0^{B'}$$

$$F(1^B) = 1^{B'}$$

Comparación de las nociones de Isomorfismo

Isomorfismo como posets:

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y)$$

Isomorfismo como estructura algebraica:

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$
$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$
$$F(x') = (F(x))''$$
$$F(0^B) = 0^{B'}$$
$$F(1^B) = 1^{B'}$$

Equivalencia de las nociones de Isomorfismo

Teorema:
Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge', '', 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ Álgebras de Boole y sean $(B \leq)$ y $(B', \leq')$ los posets asociados. Entonces una función $F : B \mapsto B'$ es un isomorfismo entre las estructuras $\langle B, \vee, \wedge, ', ^B, 1^B \rangle$ y $\langle L', \vee', \wedge', '', 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ si y sólo si lo es entre los posets $(B, \leq)$ y $(B', \leq')$.

Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como D_6 o D_{30}) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$.

O sea, son **álgebras de conjuntos.**

¿Será cierto que todas las Álgebras de Boole son álgebras de conjuntos?

(En tal caso estaríamos en presencia de una abstracción "poco abstracta")

Próximo objetivo: Teorema de Representación

Toda Álgebra de Boole **finita** B es un **álgebra de conjuntos.**
O sea, existe X tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

Pregunta inicial:

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de X?

Átomos

Sea B un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si a cubre a 0.

Notación: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de B.

Por ejemplo:

1. En $\mathcal{P}(X)$, los átomos son los conjuntos unitarios.
2. Los átomos de D_{12} son 2 y 3.

Cardinal de un conjunto

1. X tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre X y $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Si X no es finito, decimos que X es **infinito.**
3. X tiene cardinal **infinito numerable** si se puede encontrar una biyección entre X y $\mathbb{N}$. En tal caso se dice que X tiene cardinal $\aleph_0$.
4. Si X es infinito y no se puede encontrar tal biyección, decimos que X es **infinito no numerable.**
5. Ejemplos de conjuntos infinitos no numerables: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ambos tienen cardinal $\aleph_1$.

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \ldots$

1. Si X es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
2. Si X es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable.**

Conclusión: Si podemos construir un Álgebra de Boole $\mathcal{B}$ que tenga cardinal **infinito numerable** (o sea $\aleph_0$), entonces no podrá existir una biyección (ni un isomorfismo) entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{P}(X)$, para ningún X.