Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

Clase del 29 de agosto de 2014

Álgebras de Boole

Es una estructura del tipo $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$, donde B es un conjunto no vacío, y además satisface:

1. $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo
2. Para todo $x \in B$ se tiene

$$0 \leq x \qquad x \leq 1$$

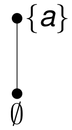
3. para cada $x \in L$, se tiene que

$$x \vee x' = 1, \qquad x \wedge x' = 0$$

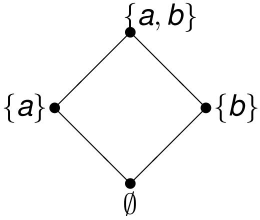
Álgebra de Boole de conjuntos

Sea X un conjunto.

Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole,



$\mathcal{P}(\{a\})$



$\mathcal{P}(\{a, b\})$

Leyes de de Morgan

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole, entonces se cumple:

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

Isomorfismo de Álgebras de Boole

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge', '', 0', 1'\rangle$ Álgebras de Boole. Una función $F : B \to B'$ se dice un *isomorfismo* si F es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$

$$F(x') = (F(x))''$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Comparación de las nociones de Isomorfismo

Isomorfismo como posets:

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y)$$

Isomorfismo como estructura algebraica:

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$

$$F(x') = (F(x))''$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Equivalencia de las nociones de Isomorfismo

Teorema:
Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge', '', 0', 1'\rangle$ Álgebras de Boole y sean $(B \leq)$ y $(B', \leq')$ los posets asociados. Entonces una función $F : B \mapsto B'$ es un isomorfismo entre las estructuras $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ y $\langle L', \vee', \wedge', '', 0', 1'\rangle$ si y sólo si lo es entre los posets $(B, \leq)$ y $(B', \leq')$.

Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como D_6 o D_{30}) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$.

O sea, son **álgebras de conjuntos.**

¿Será cierto que todas las Álgebras de Boole son álgebras de conjuntos?

(En tal caso estaríamos en presencia de una abstracción "poco abstracta")

Próximo objetivo: Teorema de Representación

Toda Álgebra de Boole **finita** B es un **álgebra de conjuntos.** O sea, existe X tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

Pregunta inicial:

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de X?