

Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

Clase del 9 de septiembre de 2014

Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como D_6 o D_{30}) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$.

O sea, son **álgebras de conjuntos**.

¿Será cierto que todas las Álgebras de Boole son álgebras de conjuntos?

(En tal caso estaríamos en presencia de una abstracción "poco abstracta")

Próximo objetivo: Teorema de Representación

Toda Álgebra de Boole **finita** B es un **álgebra de conjuntos**.
O sea, existe X tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

Pregunta inicial:

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de X ?

Átomos

Sea B un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si a cubre a 0 .

Notación: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de B .

Por ejemplo:

- 1 En $\mathcal{P}(X)$, los átomos son los conjuntos unitarios.
- 2 Los átomos de D_{12} son 2 y 3.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema

Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B se escribe de manera única como supremo de átomos.

O sea: para todo $x \in B$ se tiene:

- 1 $x = \sup\{a \in \text{At}(B) : a \leq x\}$,
- 2 si $A \subseteq \text{At}(B)$ y $x = \sup A$, entonces $A = \{a \in \text{At}(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Lema

Lema A

Sea B un álgebra de Boole finita. Para todo $x \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$.

Lema B Sea B un álgebra de Boole finita, y sean $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$. Entonces existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Teorema de Representación

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ un álgebra de Boole finita, y sea $X = At(B)$. La función

$$\begin{aligned} F : B &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ x &\longrightarrow \{a \in X : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ y $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$.

Esquema de la Prueba del TR

Lema A



Lema B



Lema



Teorema de Representación

TR no vale para el caso infinito

Existe un álgebra de Boole **infinita** que no es isomorfa $\mathcal{P}(X)$, para ningún X .

Construiremos un Álgebra de Boole \mathcal{B} , y usaremos un argumento sobre su cardinalidad para probar que no es isomorfa a ningún álgebra de la forma $\mathcal{P}(X)$.

Cardinal de un conjunto

- 1 X tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre X y $\{1, 2, \dots, n\}$.
- 2 Si X no es finito, decimos que X es **infinito**.
- 3 X tiene cardinal **infinito numerable** si se puede encontrar una biyección entre X y \mathbb{N} . En tal caso se dice que X tiene cardinal \aleph_0 .
- 4 Si X es infinito y no se puede encontrar tal biyección, decimos que X es **infinito no numerable**.
- 5 Ejemplos de conjuntos infinitos no numerables: \mathbb{R} , $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ambos tienen cardinal \aleph_1 .

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$$0 < 1 < 2 < \dots < \aleph_0 < \aleph_1 < \dots$$

- 1 Si X es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
- 2 Si X es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable**.

Conclusión: Si podemos construir un Álgebra de Boole \mathcal{B} que tenga cardinal **infinito numerable** (o sea \aleph_0), entonces no podrá existir una biyección (ni un isomorfismo) entre \mathcal{B} y $\mathcal{P}(X)$, para ningún X .

Construcción de \mathcal{B}

Un subconjunto de números naturales se dice *cofinito* si su complemento es finito.

Definimos:

$$\mathcal{B} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X \text{ es finito o cofinito}\}.$$

Entonces la estructura

$$\langle \mathcal{B}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathbf{N} \rangle$$

es un álgebra de Boole.

Problema de la representación de un reticulado

Las Álgebras de Boole finitas son álgebras de conjuntos.
¿Serán los reticulados finitos reticulados de conjuntos?

