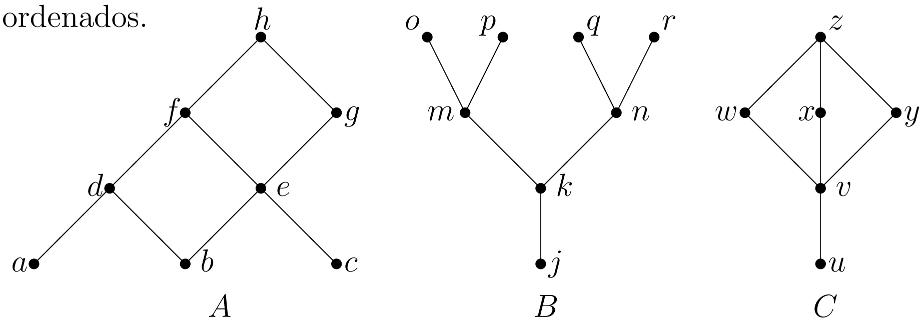
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
16/08/2013: Práctico 2

1. La siguiente figura muestra los diagramas de Hasse de tres conjuntos parcialmente ordenados.



   a) ¿Cuáles son los elementos maximales y minimales de estos conjuntos?
   b) ¿Cuáles de estos conjuntos tienen mínimo, cuáles máximo?
   c) ¿Qué elementos cubren e?
   d) Encuentre cada uno de los siguientes, si es que existe. En cada caso determine previamente el conjunto de cotas correspondiente.

$$\sup\{d, c\}, \quad \sup\{w, y, v\}, \quad \sup\{p, m\}, \quad \text{ínf}\{a, g\}. \quad \sup\{m, n\} \quad \text{ínf}\{g, a, f\}$$

2. Determine la validez de las siguientes afirmaciones para un poset $(P, \leq)$:
   a) Si P tiene elemento máximo x, entonces x es el único elemento maximal.
   b) Si P es finito y tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo.
   c) Si P tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo.

3. Sea $P = \{a, b, c, d, e\}$. Construya diagramas de Hasse que representen posets formados por estos 5 elementos, y que satisfagan:
   a) El supremo de $\{a, b\}$ es c, y el ínfimo es d. Además el ínfimo de P es e.
   b) El supremo de $\{a, b\}$, el supremo de $\{a, c\}$ y el supremo de $\{b, c\}$ coinciden, y son todos el elemento d.
   c) P no tiene supremo ni ínfimo.
   d) El supremo de $\{a, b\}$ no existe puesto que $\{a, b\}$ no tienen cotas superiores.
   e) Aunque $\{a, b\}$ tiene cotas superiores, el supremo de $\{a, b\}$ no existe.

4. Considere el conjunto parcialmente ordenado $(D_{90}, |)$ de los divisores de 90
   a) Dibuje el diagrama de Hasse de la relación "divide a".
   b) Calcule $\sup\{6, 10\}$, $\text{ínf}\{6, 10\}$, $\sup\{30, 9\}$ y $\text{ínf}\{9, 30\}$.
   c) ¿Cuál es el subconjunto más grande que encuentra dentro de D_{90} que constituya en sí mismo un orden total?

5. Determine cuales de los siguientes mapas de P a Q son isomorfismos. En caso de no serlo determine qué es lo que falla.
   a) $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = x + 1$
   b) $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = 2x$
   c) $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = -x$
   d) $P = Q = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ (con la inclusión). La función f está definida de la siguiente manera. Si a, b están ambos en A, o no están ninguno de los dos en A, entonces $f(A) = A$. En otro caso f quita de A al que está y pone al que no está. Por ejemplo,
   $f(\{a\}) = \{b\} \qquad f(\{a, c\}) = \{b, c\}$.
   e) $P = Q = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ (con la inclusión), y $f(A) = A^c$.