

Introducción a la Lógica y la Computación - Lógica proposicional
16/10/2013, Práctico 5: Conjuntos Consistentes

1. Pruebe lo siguiente:
 - a) $\Gamma \vdash \neg \perp$
 - b) $\{p_0\} \not\vdash p_1$
 - c) $\{\perp\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$
 - d) $\{\neg p_0, \neg(p_1 \wedge (\neg p_2))\} \not\vdash p_2 \rightarrow p_0$
2. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:
 - a) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.
 - b) $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$.
 - c) $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \wedge p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \rightarrow p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$
(pares implican impares...).
 - d) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{3n+1} : n \geq 0\}$.
 - e) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{4n+1} : n \geq 0\}$.
3. Probar que $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente si y sólo si $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ es consistente (ayuda: contrarrecíproca).
4. Probar:
 - Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente entonces que $\Gamma \vdash \varphi$
 - Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente entonces que $\Gamma \vdash \neg\varphi$
5. Demostrar que $\Gamma^+ := \{\varphi \in PROP : \varphi \text{ no contiene los conectivos “}\neg\text{” ni “}\perp\text{”}\}$ es consistente (Ayuda: construir una f tal que $\llbracket \varphi \rrbracket_f = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma^+$).
6. Pruebe todo Γ consistente maximal realiza la disyunción: para toda φ, ψ , se tiene $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma \text{ ó } \psi \in \Gamma]$.
7. Sea Γ consistente maximal y suponga $\{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$. Decida si las siguientes proposiciones están en Γ . (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).
 - a) $\neg p_0$
 - b) $((\neg p_1) \vee p_2)$
 - c) p_3
 - d) $p_2 \rightarrow p_5$
 - e) $p_1 \vee p_6$
8. Dar al menos dos conjuntos Γ diferentes que sean consistentes maximales y contengan al conjunto $\{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2\}$
9. ¿Es el siguiente conjunto consistente maximal?

$$\{\varphi \in PROP : \{p_0, p_1, p_3, \dots\} \vdash \varphi\}$$
10. ¿Es el subconjunto de $PROP$ formado por las tautologías un consistente maximal?