CLASE 21/08/2013

LEMA: $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ **posets, y** $f : P \to Q$ **un iso,** $S \subseteq P$**:**

(a) $\sup(S)$ existe sii $\sup(f(S))$ existe, y en tal caso $\sup(f(S)) = f(\sup(S))$

(b) $\inf(S)$ existe sii $\inf(f(S))$ existe, y en tal caso $\inf(f(S)) = f(\inf(S))$

(c) P tiene 1_P sii Q tiene 1_Q, y en tal caso $f(1_P)) = 1_Q$ (lo mismo para 0)

(d) p es maximal en P sii $f(p)$ es maximal en Q

DEFINICIÓN: POSET RETICULADO. El poset $(L, \leq)$ se dice **reticulado** si para todo $a, b \in L$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$.

$\Longrightarrow$ Recordamos que "$\leq$" en $(L, \leq)$ denota un orden parcial abstracto. Por ejemplo, escribir $(P, |)$ significa que tomamos como orden "$\leq$" a la relación "divide a".

EJEMPLOS:

Reticulado de divisores: $(D_n, |)$. Graficar $D_2,\ D_3,\ D_6, D_{12},\ D_{2^n}$

Otros ejemplos: $(\mathbf{N}, \leq)$, $(\mathbf{N}, |)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

$\Longrightarrow$ **NOTACIÓN**: "estilo operación binaria" $\quad x \vee y = sup\{x, y\}, \qquad x \wedge y = inf\{x, y\}$

Propiedades genrales de los posets reticulados.

(a) $x \leq x \vee y, \quad x \wedge y \leq x$

(b) $x \vee y \leq s \Leftrightarrow x \leq s,\ y \leq s \qquad i \leq x \wedge y \Leftrightarrow i \leq x,\ i \leq y$

(c) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \vee y = y \quad \Leftrightarrow \quad x \wedge y = x$

(d) ley de compatibilidad $\quad x \leq z\ \wedge\ y \leq w \quad \Longrightarrow \quad x \vee y \leq z \vee w, \quad x \wedge y \leq z \wedge w$

LEMA: Propiedades Ecuacionales de los reticulados.

(1) leyes de idempotencia: $x \vee x = x \wedge x = x$

(2) leyes conmutativas: $x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x$

(3) leyes asociativas: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \qquad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

(4) leyes de absorción: $x \vee (x \wedge y) = x \qquad x \wedge (x \vee y) = x$

$\Longrightarrow$ PROCESO DE ALGEBRIZACIÓN ¿Es posible dar ecuaciones para $\vee, \wedge$ que caractericen completamente el orden a través de la prop. (c)?

Esto significa: si doy un conjunto con dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ que satisfacen

las ecuaciones entonces a través de la propiedad (c) tengo definido un orden

$\Longrightarrow$ Considere las siguientes definiciones de $\vee, \wedge$. ¿Qué en relación a las ecuaciones que satisfacen:

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	**1**	1
b	b	**1**	b	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	**a**	a
b	0	**a**	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	**1**	1
b	b	**1**	b	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	**0**	a
b	0	**0**	b	b
1	0	a	b	1

La primera no satisface absorción: $(a \wedge b) \vee b = 1$. La segunda satisface las 4 propiedades.

$\Longrightarrow$ Presentación de un reticulado como un tipo abstracto de dato:

TAD RETICULADO

sort: *el*

ops: $(\wedge) : el \times el \to el$

$(\vee) : el \times el \to el$

AXIOMAS: idempotencia, conmutatividad, asociatividad y absorción