CLASE 23/08/2012

POSET RETICULADO

El poset $(L, \leq)$ se dice poset reticulado si para todo $a, b \in L$, existen $\sup(\{a,b\})$ e $\inf(\{a,b\})$.

RETICULADO (como estructura algebraica)

Es un triple $\langle L, \bigcirc\!\!\!\!\vee\,, \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, \rangle$ tal que L es un conjunto no vacío, y $\bigcirc\!\!\!\!\vee\,$, $\bigcirc\!\!\!\!\wedge\,$ son operaciones binarias que satisfacen las leyes de idempotencia, conmutatividad, asociatividad y absorción.

TAD RETICULADO
sort: *el*
ops: $(\bigcirc\!\!\!\!\wedge\,) : el \times el \to el$
$(\bigcirc\!\!\!\!\vee\,) : el \times el \to el$

AXIOMAS:

ley de idempotencia: $x \bigcirc\!\!\!\!\vee\, x = x \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, x = x$

ley de conmutatividad: $x \bigcirc\!\!\!\!\vee\, y = y \bigcirc\!\!\!\!\vee\, x \qquad x \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, y = y \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, x$

ley de absorción: $x \bigcirc\!\!\!\!\vee\, (x \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, y) = x \qquad x \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, (x \bigcirc\!\!\!\!\vee\, y) = x$

ley de asociatividad: $(x \bigcirc\!\!\!\!\vee\, y) \bigcirc\!\!\!\!\vee\, z = x \bigcirc\!\!\!\!\vee\, (y \bigcirc\!\!\!\!\vee\, z) \qquad (x \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, y) \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, z = x \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, (y \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, z)$

$\Longrightarrow$ Modelo del TAD RETICULADO = Reticulado como estructura algebraica

$\Longrightarrow$ El poset $(L, \leq)$ y la estructura $\langle L, \bigcirc\!\!\!\!\vee\,, \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, \rangle$ son distintas presentaciones para el objeto "reticulado". La definición de una clase de estructuras (TIPO ABSTRACTO) nos permite hablar de un MODELO de las ecuaciones que la definen.

$\Longrightarrow$ PREGUNTA 1: ¿Todo modelo del TAD reticulado es un poset?

$\Longrightarrow$ PREGUNTA 2: Si un modelo del TAD reticulado es un poset, y en consecuencia tiene definido un orden, ¿es ese poset reticulado?

$\Longrightarrow$ PREGUNTA 3: Si un modelo del TAD reticulado es un poset reticulado con el orden $\leq$, ¿coincide el supremo y el ínfimo con $\bigcirc\!\!\!\!\wedge\,$, $\bigcirc\!\!\!\!\vee\,$?

$\Longrightarrow$ PREGUNTA 4 ¿que diferencias encuentran entre esta definición y la especificación de, por ejemplo una pila?

$\Longrightarrow$ EJEMPLOS: $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$, $\langle D_n, \text{mcm}, \text{mcd} \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \max, \min \rangle$ son estr. reticuladas

Un poset reticulado $(L, \leq)$ puede "mutar" a un reticulado:
si definimos $x \vee y = sup\{x, y\}, \ x \wedge y = inf\{x, y\}$
la estructura $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ satisface las leyes solicitadas

Un reticulado $\langle L, ⓥ, ⓐ \rangle$ puede "mutar" a un poset reticulado $(L, \leq)$
Definimos $x \leq y \Longleftrightarrow x ⓥ y = y$

$\Longrightarrow$ ¿Al volver a mutar el cpo, se recupera el reticulado (como EA) original?

LEMA: $\langle L, \varovee, \owedge \rangle$ reticulado. Definimos $x \leq y$ si y sólo si $x \varovee y = y$.
Entonces $\leq$ es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:
$x \varovee y = \sup\{x, y\}, \ \ x \owedge y = \inf\{x, y\}.$

$\Longrightarrow$ **Isomorfismos de reticulados como estructura algebraica**

DEFINICIÓN: Isomorfismo de reticulados.
Sean $\langle L, \varovee, \owedge \rangle$ y $\langle L', \varovee', \owedge' \rangle$ reticulados. Una función $F : L \to L'$ se dice un *isomorfismo* de reticulados si F es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que
$F(x \varovee y) = F(x) \varovee' F(y) \qquad F(x \owedge y) = F(x) \owedge' F(y).$

LEMA: Sean $\langle L, \varovee, \owedge \rangle$ y $\langle L', \varovee', \owedge' \rangle$ cpos ret. y sean $(L \leq)$ y $(L', \leq')$ los cpos asoc.
Entonces una función $F : L \mapsto L'$ es un isomorfismo entre las estructuras $\langle L, \varovee, \owedge \rangle$ y $\langle L', \varovee', \owedge' \rangle$ si y sólo si lo es entre los posets $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$.