CLASE 30/08/2013

ÁLGEBRAS DE BOOLE

Es un $(B, \vee, \wedge, 0^B, 1^B, ')$ tal que $(B, \vee, \wedge, 0^B, 1^B)$ es un reticulado acotado y distributivo, y para todo $x \in B$ se tiene que x' es el complemento de x.

$\Longrightarrow$ EJEMPLO: $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X, ^c)$ es un álgebra de Boole, esto es, definimos $A' = A^c$

$\Longrightarrow$ $(D_n, mcm, mcd, 1, n, ')$ es un álgebra de Boole si n es producto de primos distintos,

$\Longrightarrow$ ¿cómo se define x'? Es el producto de los primos que no están en x: $x' = \frac{n}{x}$

$\Longrightarrow$ PRUEBA de la distributividad de D_n

Sea $\{d, a, b, c, m\}$ el M_3. Si $d = mcd\{a, b\}$ y $m = mcm\{a, b\}$,

entonces $ab = md$. Idem con a, c. Así probar que $b = c$.

$\Longrightarrow$ **Isomorfismo de Álgerbas de Boole**: es un isomorfismo de reticulados (como EA) que además preserva el máximo, mínimo y el complemento. Esto es:

Si $\langle B, \bigovee, \bigowedge, 0, 1, ' \rangle$ y $\langle B', \bigovee', \bigowedge', 0', 1', '' \rangle$ son AB, y $f : B \to B'$ entonces

$\Longrightarrow$ f es iso de AB si es iso de reticulados y

$f(0_B) = 0_{B'},\ f(1_B) = 1_{B'}$

$f(x') = x''$

$\Longrightarrow$ Vimos que basta que sea iso de poset para ser iso de reticulados

$\Longrightarrow$ PREGUNTA: ¿Basta que sea iso de opset para ser iso de Álgebras de Boole?

$\Longrightarrow$ NOTAR: Iso de estructura algebraica inplica iso de poset.

LEMA:

$\langle B, \bigovee, \bigowedge, 0, 1, ' \rangle$ y $\langle B', \bigovee', \bigowedge', 0', 1', '' \rangle$ Álgebras de Boole.

Si $f : B \to B'$ es un isomorfismo de poset, entonces también es un iso de Álgebras de Boole

$\Longrightarrow$ Siguiendo con la idea de las Álgebras de Boole como abstracción de conjuntos:

LEMA: LEYES DE De MORGAN
En toda AB valen las leyes: $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

TEOREMA DE REPRESENTACION para las AB finitas
Si B es un AB finita entonces B es iso a $\mathcal{P}(X)$ para algún X.

$\Longrightarrow$ Los elementos de X en el AB $\mathcal{P}(X)$ juegan el rol de átomos

DEFINICIÓN: Un elemento $a \in B$ será llamado átomo si a cubre a 0.
Mediante $At(B)$ denotamos el conjunto de todos los átomos de B.

LEMA
Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B se escribe de manera única como supremo de átomos. O sea: para todo $x \in B$ se tiene:
$x = sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$
si $A \subseteq At(B)$ y $x = sup\, A$, entonces $A = \{a \in At(B) : a \leq x\}$

$\Longrightarrow$ DEFINICIÓN: $A_x = \{a \in At(B) : a \leq x\}$

TEOREMA: Sea $\langle B, \textcircled{\vee}, \textcircled{\wedge}, ^c, 0, 1\rangle$ **un álgebra de Boole finita**
y sea $X = At(B)$. Entonces el mapa
$F : B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$x \longrightarrow A_x$
es iso de B con $\mathcal{P}(X)$