1. CLASE - 04/09/2013

DEFINICIÓN: Un elemento $a \in B$ será llamado átomo si a cubre a 0.
Mediante $At(B)$ denotamos el conjunto de todos los átomos de B.

LEMA
Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B se escribe de manera única como supremo de átomos. O sea: para todo $x \in B$ se tiene:
$x = sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$
si $A \subseteq At(B)$ y $x = sup\, A$, entonces $A = \{a \in At(B) : a \leq x\}$

TEOREMA: Sea $\langle B, ⓥ, ⓐ, ^c, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole finita
sea $X = At(B)$. Entonces el mapa
$F : B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$x \longrightarrow \{a \in At(B) : a \leq x\}$
es iso de B con $\mathcal{P}(X)$

$\Longrightarrow$ EJEMPLO: $\mathbf{2}^n$ es un álgebra de Boole. Mostrar el isomorfismo con partes de X: Representación de conjuntos como mapa de bits.

$\Longrightarrow$ EJEMPLO: D_n es un álgebra de Boole si n es producto de primos distintos. Mostrar el isomorfismo con partes de X

$\Longrightarrow$ **Construcción de reticulados distributivos a partir de posets**

$\Longrightarrow$ IDEA: generalizar $\mathcal{P}(X)$ tomando el conjunto formado por los conjuntos *decrecientes* de un poset

DEFINICIÓN $(P, \leq)$ **cpo**
Diremos que $D \subseteq P$ es *decreciente* si para todo $x, z \in P$ se tiene $x \in D$ y $z \leq x \Longrightarrow z \in D$.
$\mathcal{D}(P) = \{D \subseteq P : D \text{ es decreciente}\}$.
$\langle \mathcal{D}(P), \cup, \cap, \emptyset, P\rangle$. es ret. distributivo

---

$\Longrightarrow$ TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE BIRKHOFF Todo reticulado distributivo finito es isomorfo al reticulado de decrecientes de un poset.

$\Longrightarrow$ Dado un reticulado distributivo finito ¿Cómo se obtiene el poset que "genera" el reticulado? ¿Qué elementos juegan el papel de los átomos de un álgebra de Boole?

> **DEFINICIÓN L reticulado acotado.**
> Un elemento $x \in L$ será llamado $\bigcirc\!\!\!\!\vee$-irreducible (o simplemente irreducible) si $x \neq 0$, y si $x = y \bigcirc\!\!\!\!\vee z$, entonces $x = y$ o $x = z$, para todo $y, z \in L$.
> $Irr(L) = \{i \in L : i \text{ es irredicible}\}$

$\Longrightarrow$ EJEMPLO: Los irreducibles en un álgebra de Boole B son exactamente los átomos: $At(B)) = Irr(B)$