1. CLASE 14/08/2013

RELACIONES

$\Longrightarrow$ Según la Real Academia Española es:

"*el resultado de comparar dos cantidades expresadas en números*"

$\Longrightarrow$ El resultado se expresa con un "si" o un "no". Por ejemplo, la relación “orden” sobre los naturales queda determinada si logramos asociar un “si” o un “no” a cada par ordenado. El conjunto de pares a los cuales se les asocia un "si" determina la relación.

DEFINICIÓN: Sean A y B conjuntos. Una *relación* R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$: o sea $R \subseteq A \times B$.
Si $A = B$ decimos que R es una relación sobre A
NOTACIÓN: $(x,y) \in R$, $x \sim_R y$

EJEMPLOS: $A = \{1,2,3,6,12\}$
Relación $R =$“divide a”: $a \sim b$ si y sólo si a divide a b,

$$R = \{(1,1),...(12,12),(1,2),...,(1,12),(2,6),(2,12),(3,6),(3,12),(6,12)\}$$

Relación $R =$ “módulo 2”: $a \sim b$ si y sólo si $2|b-a$,

$$R = \{(1,1),...,(12,12),(2,6),(6,2),(1,3),(3,1),(12,6),(6,12),(2,12),(12,2),\}$$

$\Longrightarrow$ ¿Como "graficar" una relación? Usamos un grafo dirigido. (Graficar las relaciones del ej.)

$\Longrightarrow$ **Propiedades de las relaciones**

$\Longrightarrow$ ¿Qué entendemos por "propiedad de una relación"? Una propiedad refiere exclusivamente a la relación, y no a la naturaleza de sus elementos

Ej: Relativa a la rel. "divide", no es una propiedad: "existe divisor par"

PROPIEDADES DE UNA RELACIÓN (R relación sobre A)
reflexiva: para todo $a \in A$, $a \sim a$
simétrica: para todo a, $b \in A$, si $a \sim b$ entonces $b \sim a$
antisimétrica: para todo a, $b \in A$ $a \sim b$ y $b \sim a$ implican que $a = b$
transitiva:para todo a, b y c, $a \sim b$ y $b \sim c$ implican que $a \sim c$

$\Longrightarrow$ Ej: la propiedad "módulo" es reflexiva, simétrica y transitiva

$\Longrightarrow$ Ej: la propiedad "divide" es reflexiva, antisimétrica y transitiva

$\Longrightarrow$ Simplificaciones del "diagrama":

(1) Si es reflexiva evitamos el rulo
(2) Si es simétrica quitamos la direccionalidad (juntando la flecha que va y la que viene)
(3) Si es transitiva eliminamos "atajos"

EJEMPLO: Desarrollar simplificaciones del diagrama sobre
$A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, $R_1 =$ "divide a", $R_2 =$ "misma paridad"

TIPOS RELEVANTES DE RELACIONES
Relaciones de equivalencia = reflexiva + simétrica + transitiva (notación: $\simeq$)
Relaciones de orden = reflexiva + antisimétrica + transitiva (notación: $\preceq$)

$\Longrightarrow$ **Ej.** Rel. de equivalencia: módulo, igual. Rel de orden: orden (en $\mathbb{N}$), incluido, divide

RELACIONES DE EQUIVALENCIA
DEFINICIÓN: Clase de equivalencia $\quad [x] = \{y \in A : y \simeq x\}$

$\Longrightarrow$ EJEMPLO: las clases de la relación paridad:

$[1] = [3] = \{1, 3\}$, $[2] = [6] = [12] = \{2, 6, 12\}$

TEOREMA: Sea $\simeq$ una relación de equivalencia en un conjunto A
(1) $[x] = [y]$ si y sólo si $x \simeq y$.
(2) si $x \not\simeq y$, entonces $[x]$ e $[y]$ son disjuntas.

$\Longrightarrow$ Una relación de equivalencia origina una PARTICIÓN del conjunto. Además, una partición del conjunto define una relación de equivalencia. En el ejemplo anterior [1],[2] es una partición de $\{1, 2, 3, 6, 12\}$.