Clase 27/09/2013

Tomado y editado de los apuntes de Pedro Sánchez Terraf

Escenas del episodio anterior

- objetivo: estudiar formalmente el concepto de demostración matemática.
- caso de estudio: lenguaje relativamente sencillo = lógica proposicional.
- lógica proposicional: sintaxis (notación) y semántica (significado).
- sintaxis.
  - símbolos, alfabeto (Σ), conjunto de todas las cadenas de símbolos Σ^*.
  - definición inductiva del conjunto de proposiciones $PROP$.
  - ejemplos de cadenas que son proposiciones y de otras que no lo son.
  - principio de inducción sobre $PROP$.
  - esquema de recursión sobre $PROP$, ejemplos.
  - conjunto de variables que ocurren en una proposición (función *vars*).
  - conjunto de subfórmulas que ocurren en una proposición (función *sub*).
  - aplicación de una substitución.
  - serie de formación de una proposición.
  - ejemplo de prueba por inducción: existencia de serie de formación.

Semántica

La semántica o el significado de las proposiciones se da frecuentemente en términos de *tablas de verdad*:

p_0	p_1	$(\neg p_0)$	$(p_0 \wedge p_1)$	$(p_0 \vee p_1)$	$(p_0 \to p_1)$	$(p_0 \leftrightarrow p_1)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Asignaciones y valuaciones

En cada fila de la tabla de verdad se **asigna** un valor de verdad (0 ó 1) a cada una de las variables que participan en la proposición que se está considerando. Del valor de verdad **asignado** a cada variable se deduce el valor de verdad que le corresponde en esa fila a la proposición.

Sea $f \in \mathcal{V} \longrightarrow \{0,1\}$ una **asignación** de valores de verdad a cada variable proposicional. Es posible calcular el valor de verdad $[\![\cdot]\!]_f : PROP \longrightarrow \{0,1\}$ de cada proposición para dicha asignación, utilizando el esquema de recursión:

$$
\begin{array}{rcl}
[\![p_i]\!]_f & = & f(p_i) \\
[\![\bot]\!]_f & = & 0 \\
[\![(\neg\varphi)]\!]_f & = & 1 - [\![\varphi]\!]_f \\
[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f & = & \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} \\
[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f & = & \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} \\
[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f & = & \text{máx}\{1 - [\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} \\
[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!]_f & = & 1 - (\text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} - \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\})
\end{array}
$$

La ecuación correspondiente al implica se deduce de la conocida equivalencia entre $(\varphi \to \psi)$ y $((\neg\varphi) \vee \psi)$. La del $\leftrightarrow$, se explica observando que $\text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} - \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$ es 0 cuando $[\![\varphi]\!]_f = [\![\psi]\!]_f$ y 1 en caso contrario.

Las ecuaciones ponen de manifiesto que a partir de una asignación de valores de verdad a cada variable se puede construir una **valuación**:

Definición 1. Una función $v : PROP \to \{0,1\}$ es una *valuación* si:

1. $v(\bot) = 0$.
2. $v((\neg\varphi)) = 1 - v(\varphi)$.
3. $v((\varphi \wedge \psi)) = \text{mín}\{v(\varphi), v(\psi)\}$.
4. $v((\varphi \vee \psi)) = \text{máx}\{v(\varphi), v(\psi)\}$.
5. $v((\varphi \to \psi)) = \text{máx}\{1 - v(\varphi), v(\psi)\}$
6. $v((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 - (\text{máx}\{v(\varphi), v(\psi)\} - \text{mín}\{v(\varphi), v(\psi)\})$

Valuación y asignación no son sinónimos. Una valuación es una función de $PROP$ en $\{0,1\}$ que satisface las condiciones que se acaban de enumerar. Una asignación, en cambio, es una función de $\mathcal{V}$ en $\{0,1\}$. Los conceptos están estrechamente relacionados porque, por un lado, cuando se restringe una valuación a las variables proposicionales se obtiene una asignación, y por el otro, dada una asignación f hay una única manera de extenderla a todo $PROP$ de modo de obtener una valuación: $[\![\cdot]\!]_f$.

Más aún, estos procesos son inversos uno del otro: si partimos de una asignación f, la extendemos a una valuación y luego la restringimos a $\mathcal{V}$ obtenemos la f inicial; y recíprocamente, si partimos de una valuación v, la restringimos a $\mathcal{V}$ y luego la extendemos a $PROP$ obtenemos la v inicial. Por esta razón, algunos de los resultados que siguen pueden enunciarse en términos de asignaciones o valuaciones indistintamente.

Teorema 2 (de Extensión)**.** *Sea $f : \mathcal{V} \to \{0,1\}$. Entonces existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![p_i]\!]_f = f(p_i)$ para toda variable proposicional $p_i \in \mathcal{V}$.*

Corolario 3. *Si v y v' son valuaciones que coinciden en $\mathcal{V}$ (es decir, $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in \mathcal{V}$), entonces $v = v'$.*

Demostración. Si llamamos f a la restricción de v a $\mathcal{V}$ y f' a la de v', la coincidencia entre v y v' significa que $f = f'$ y por lo tanto $v = [\![\cdot]\!]_f = [\![\cdot]\!]_{f'} = v'$. □

En realidad, en cada una de las filas de las tablas de verdad no asignamos valores de verdad a todas las variables de $\mathcal{V}$, sino solamente a aquéllas que ocurren en la proposición que se está considerando. Esto se debe a que el valor de verdad de una proposición solamente depende del valor de verdad de las variables que ocurren en ella:

Lema 4 (de Coincidencia)**.** *Si $f(p_i) = f'(p_i)$ para toda p_i que ocurra en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.*

Este lema es el que justifica el uso de tablas de verdad: si deseo determinar el valor de verdad de una proposición φ para una asignación f, no importa el valor de f en todas las variables, solo importa su valor sobre las variables que ocurren en φ.

A continuación otra propiedad interesante. Dice que al determinar el valor de verdad de una proposición ψ para una asignación dada f, no importa cuáles son exactamente las subfórmulas de ψ, lo único que verdaderamente importa es cuáles son los valores de verdad que f determina para esas subfórmulas:

Lema 5. *Para toda asignación* $[\![\cdot]\!]$, $[\![\varphi_1]\!]_f = [\![\varphi_2]\!]_f$ *implica* $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!]_f = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]_f$.

Validez

Cada fila de la tabla de verdad describe el valor de una proposición en un caso particular: en el caso en que las variables tengan los valores de verdad determinados por esa fila. El significado de una proposición debe estar dado por el valor de verdad que le corresponde en todos y cada uno de los casos, es decir, por la totalidad de la tabla de verdad.

Con ella se puede determinar, por ejemplo, si una proposición es una tautología. Una tautología (también llamada proposición lógicamente válida) es una proposicíon que resulta verdadera cualquiera sea la asignación de valores de verdad a sus variables, es decir, para cualquier valuación.

Decimos que una asignación f satisface la proposición φ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$. Sea $\Gamma \subseteq PROP$, si f satisface todas las proposiciones de Γ decimos que f es una asignación de Γ y escribimos $[\![\Gamma]\!]_f = 1$.

Definición 6. φ es una *tautología* (escribimos "$\models \varphi$") si y sólo si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda asignación f. Sea $\Gamma \subseteq PROP$; decimos que φ es *consecuencia lógica* de Γ (escribimos "$\Gamma \models \varphi$") si y sólo toda asignación de Γ satisface φ.

Observar que $\models \varphi$ es lo mismo que $\emptyset \models \varphi$.

- $\models (\varphi \to \varphi)$.

  Para toda f tenemos $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = \text{máx}\{1 - [\![\varphi]\!]_f, [\![\varphi]\!]_f\}$. Como $[\![\varphi]\!]_f \in \{0,1\}$, analizamos ambos casos. Si $[\![\varphi]\!]_f = 0$, entonces $1 - [\![\varphi]\!]_f = 1$. Si $[\![\varphi]\!]_f = 1$, entonces $1 - [\![\varphi]\!]_f = 0$. En ambos casos, $1 = \text{máx}\{1 - [\![\varphi]\!]_f, [\![\varphi]\!]_f\} = [\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f$.

- $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$.

  Como en el punto anterior, tenemos $[\![((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)]\!]_f = \text{máx}\{1 - [\![(\neg(\neg\varphi))]\!]_f, [\![\varphi]\!]_f\} = \text{máx}\{1 - (1 - [\![(\neg\varphi)]\!]_f), [\![\varphi]\!]_f\} = \text{máx}\{[\![(\neg\varphi)]\!]_f, [\![\varphi]\!]_f\} = \text{máx}\{1 - [\![\varphi]\!]_f, [\![\varphi]\!]_f\} = 1$.

- $\Gamma \models \varphi$ para toda proposición $\varphi \in \Gamma$.

  Si f es una asignación de Γ, por definición tiene que satisfacer φ.

- $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.

  Sea f una asignación de $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, es decir, tal que $[\![\varphi]\!]_f = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 1$. Por definición de $[\![\cdot]\!]_f$, $1 = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = \text{máx}\{1 - [\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} = \text{máx}\{1 - 1, [\![\psi]\!]_f\} = \text{máx}\{0, [\![\psi]\!]_f\} = [\![\psi]\!]_f$.

- $\not\models p_1$

  Sea f una asignación tal que $f(p_1) = 0$, obviamente f no satisface p_1.

El siguiente teorema dice que si se reemplaza una subfórmula de una proposición por otra lógicamente equivalente, la nueva proposición es lógicamente equivalente a la original.

Teorema 7 (de Sustitución)**.** *Si* $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Completitud Funcional

Una conclusión que puede obtenerse del lema de coincidencia, es que el significado de una proposición φ está dado por su tabla de verdad. Si φ posee n variables diferentes, solamente interesan 2^n casos, pues 2^n es el número de asignaciones que difieren entre sí en esas n variables. En ese caso, la tabla de verdad de φ constará de 2^n filas, en cada una de ellas hay valores de verdad asignados a las variables y a φ.

Los valores de esa tabla de verdad describen una función de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$. Esa función es el significado de la proposición φ. Una pregunta muy interesante es si vale el resultado inverso. Dada una función de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$, ¿existe una proposición cuya tabla de verdad sea esa función?

Consideremos por ejemplo la siguiente función de $\{0,1\}^3$ en $\{0,1\}$, en la tabla de la izquierda:

p_0	p_1	p_2	φ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

	p_0	p_1	p_2	φ
	1	1	1	0
$\varphi_1 = ((p_0 \wedge p_1) \wedge (\neg p_2))$	1	1	0	1
	1	0	1	0
	1	0	0	0
	0	1	1	0
$\varphi_2 = (((\neg p_0) \wedge p_1) \wedge (\neg p_2))$	0	1	0	1
$\varphi_3 = (((\neg p_0) \wedge (\neg p_1)) \wedge p_2)$	0	0	1	1
	0	0	0	0

¿existe una proposición φ que tenga dicha tabla?

No es difícil comprobar que con las conectivas $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ siempre se puede obtener una tal proposición φ. Por ejemplo, identificando cada una de las filas en que φ tiene valor 1 y en cada fila armar la conjunción correspondiente, que se visualiza en la tabla de la derecha. Finalmente, unir todos los casos (en el ejemplo son tres) en disyunción: $\varphi = ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$.

Esta propiedad que tienen el conjunto de conectivas $\{\wedge, \vee, \neg\}$, de ser capaces de construir proposiciones para una función de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$ dada, se llama **completitud funcional**, y se dice que ese conjunto de conectivas es funcionalmente completo.

También se puede demostrar que el conjunto $\{\wedge, \neg\}$ es funcionalmente completo. ¿Cómo? Ahora que sabemos que el conjunto $\{\wedge, \vee, \neg\}$ lo es, alcanza con ver que estás conectivas son reemplazables por aquéllas. En efecto, $\wedge$ y $\neg$ están en ambos conjuntos. En cambio $\vee$, puede escribirse facilmente en términos de $\wedge$ y $\neg$: se reemplaza proposiciones de la forma $(\varphi \vee \psi)$ por $(\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)))$.

Del mismo modo puede comprobarse que el conjunto $\{\vee, \neg\}$ es funcionalmente completo. Y también lo es el conjunto $\{\rightarrow, \bot\}$.