Clase 02/10/2013

Tomado y editado de los apuntes de Pedro Sánchez Terraf

Escenas de episodios anteriores

- objetivo: estudiar formalmente el concepto de demostración matemática.
- caso de estudio: lenguaje relativamente sencillo = lógica proposicional.
- lógica proposicional: sintaxis (notación) y semántica (significado).
- sintaxis.
  - símbolos, alfabeto (Σ), conjunto de todas las cadenas de símbolos Σ^*.
  - definición inductiva del conjunto de proposiciones $PROP$.
  - principio de inducción sobre $PROP$.
  - esquema de recursión sobre $PROP$.
- semántica
  - tablas de verdad, asignaciones y valuaciones.
  - lemas de coincidencia y de substitución.
  - validez lógica ($\models \varphi$) y consecuencia lógica ($\Gamma \models \varphi$).
  - completitud funcional

Deducción natural

Deducción natural es una manera de definir formalmente el concepto de demostración matemática.

Puede convenir establecer algunas precedencias para evitar escribir todos los paréntesis: $\neg$, ($\wedge$, $\vee$), $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. Además omitiremos los paréntesis externos de las proposiciones. Estas convenciones sólo se adoptan a los fines de facilitar la comunicación entre nosotros, los paréntesis deberían seguir escribiéndose, sólo que preferimos no verlos.

Por ahora nos limitamos a las conectivas $\wedge$, $\rightarrow$ y $\bot$ que sabemos que conforman un conjunto funcionalmente completo de conectivos.

¿Qué es una demostración?

Una demostración matemática habitualmente es una **secuencia** de argumentos donde en cada **paso** se razona a partir de lo que se conoce o se ha asumido y se obtienen **nuevos conocimientos** hasta descubrir que se conoce lo que se deseaba demostrar.

Rescatemos esta idea de que hay varios **pasos** en cada demostración, y que en cada uno se adquieren **nuevos conocimientos** a partir de lo que ya se sabía. Esta manera de adquirir nuevos conocimientos no es arbitraria, debe ser a través de una inferencia correcta.

Reglas de Inferencia

Estableceremos, pues, **reglas de inferencia**: mecanismos correctos que permitan pasar de ciertos conocimientos previamente adquiridos a otros conocimientos “nuevos”. Cada regla indicará una manera de pasar de conocimientos previamente adquiridos (a éstos se les llamará **premisas** de las reglas) a conocimientos nuevos (éste será uno solo y se lo llamará **conclusión** de la regla).

Conjunción

Por ejemplo, una regla dice que cada vez que uno sepa que las proposiciones φ y ψ son válidas, puede concluir que la proposición $\varphi \wedge \psi$ también lo es. Escribimos esta regla de la siguiente manera:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Así, las premisas de las reglas van sobre la línea horizontal y la conclusión debajo de ella. Al costado hemos colocado la abreviatura del nombre de la regla, en este caso se llama introducción de $\wedge$ porque *introduce* en la conclusión ese conectivo.

Otra regla dice que cada vez que uno sepa que una proposición de la forma $\varphi \wedge \psi$ es válida, puede concluir que la proposición φ también lo es. La escribimos así:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E$$

Esta regla se llama eliminación de $\wedge$ porque *elimina* en la conclusión ese conectivo que estaba presente en la premisa. Otra regla con el mismo nombre permite concluir ψ:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

Recordemos que φ y ψ son meta-variables. No son variables de la lógica proposicional (p_0, p_1, etc) sino que representan proposiciones arbitrarias. Si reemplazamos φ y ψ por proposiciones en alguna de las reglas obtenemos ya demostraciones sencillas:

$$\frac{p_0 \to p_1 \quad p_2}{(p_0 \to p_1) \wedge p_2} \wedge I \qquad\qquad \frac{p_0 \wedge (p_5 \to p_2)}{p_5 \to p_2} \wedge E$$

La primera es una demostración de que, de la validez de $p_0 \to p_1$ y la de p_2 se puede concluir o **derivar** o inferir la validez de $(p_0 \to p_1) \wedge p_2$. La segunda es una **derivación de** $p_5 \to p_2$ **a partir de** $p_0 \wedge (p_5 \to p_2)$.

Derivaciones más interesantes pueden construirse combinando las reglas. El encastre tiene reminiscencias con el encastre de piezas de un rompecabezas. Sólo se pueden encastrar reglas cuando la forma de una premisa de una de ellas coincide con la forma de la conclusión de la otra. Por ejemplo, la siguiente es una derivación de $(p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_0)$ partir de $(\neg p_0) \wedge (p_1 \to p_2)$.

$$\frac{\dfrac{(\neg p_0) \wedge (p_1 \to p_2)}{p_1 \to p_2} \wedge E \qquad \dfrac{(\neg p_0) \wedge (p_1 \to p_2)}{\neg p_0} \wedge E}{(p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_0)} \wedge I$$

En realidad se puede hacer una derivación más general usando metavariables:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I$$

es una derivación de $\psi \wedge \varphi$ a partir de $\varphi \wedge \psi$.

Se repite la frase: esto es una **derivación de** ... **a partir de** .... ¿Cómo sabemos qué va en los puntos suspensivos? En los primeros, va la proposición que se encuentra abajo de todo en la derivación. En los segundos van las proposiciones que no han sido cubiertas por líneas horizontales (las "sin techo"). En el último ejemplo hay dos ocurrencias de proposiciones sin techo: en ambos casos se trata de la proposición $\varphi \wedge \psi$.

Escribimos

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ \vdots\, D \\ \psi \wedge \varphi \end{array}$$

para decir que D es una derivación de $\psi \wedge \varphi$ a partir de $\varphi \wedge \psi$ como la del último ejemplo.

Más generalmente, cuando escribimos

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots\, D \\ \psi \end{array}$$

estamos diciendo que D es una derivación de ψ a partir de φ. Esto significa que en la derivación D, la proposición ψ se encuentra en el lugar de la conclusión (bien abajo), y que puede haber 0, 1 ó más ocurrencias "sin techo" de la proposición φ. Esta notación no implica que φ sea la única proposición "sin techo" de D.

A veces no es necesario darle nombre a la derivación y escribimos directamente

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

Implicación

Recapitulando, cuando tenemos una derivación como esa decimos que hemos derivado ψ a partir de φ. Pero si hemos hecho esto es porque tenemos una demostración formal de ψ a partir de φ. Intuitivamente, una tal demostración debería ser aceptable como demostración de $\varphi \to \psi$. Podríamos escribir la siguiente regla:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}$$

Sin embargo esto tiene un problema: las ocurrencias "sin techo" de φ siguen estando "sin techo". Si seguimos al pie de la letra lo explicado anteriormente deberíamos decir "la derivación que acabamos de escribir es una derivación de $\varphi \to \psi$ a partir de φ". Y eso no es lo que queremos decir, queremos decir simplemente que es "una derivación de $\varphi \to \psi$".

Por esta razón, esta regla se escribe así:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Por un lado, hemos agregado el nombre de la regla, es la introducción de $\to$ porque dicho conectivo aparece en la conclusión. Por el otro, marcamos con corchetes las ocurrencias "sin techo" de φ para indicar que dichas ocurrencias no deben contarse como ocurrencias "sin techo" cuando miramos la derivación de $\varphi \to \psi$. A esto se lo llama **descargar** o **cancelar la hipótesis** φ.

Por ejemplo, si retomamos el ejemplo de la conmutatividad de la conjunción, teníamos la derivación

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E}{\psi \wedge \varphi} \wedge I$$

utilizando la nueva regla obtenemos

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi} \wedge E \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi} \wedge E}{\psi \wedge \varphi} \wedge I}{(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)} \to I_1$$

donde hemos cancelado las dos ocurrencias de la hipótesis $\varphi \wedge \psi$. El subíndice se utiliza para señalar cuál fue la regla que canceló dicha hipótesis, utilizamos el mismo subíndice en la cancelación y en el nombre de la regla.

La regla de eliminación de $\to$ es más sencilla y resulta familiar. Suele llamarse también *modus ponens*:

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

No es necesario dar reglas para la negación, alcanza con definir $\neg\varphi$ como $\varphi \to \bot$. Veamos un ejemplo de derivación que utiliza las reglas del $\to$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_3 \quad [\varphi \to \psi]_1}{\psi} \to E \qquad [\neg\psi]_2}{\bot} \to E}{\neg\varphi} \to I_3}{(\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Hay tres instancias de utilización de la regla de introducción de $\to$, en cada una de ellas se cancela alguna hipótesis. Se ha logrado derivar $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ ("a partir de nada"). En cambio, si observamos la siguiente subderivación

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \neg\psi}{\bot} \to E$$

es una derivación de $\bot$ a partir de φ, $\varphi \to \psi$ y $\neg\psi$; mientras que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_3 \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \neg\psi}{\bot} \to E}{\neg\varphi} \to I_3$$

es una derivación de $\neg\varphi$ a partir de $\varphi \to \psi$ y $\neg\psi$.

Bottom

El conectivo $\bot$ no tiene regla de introducción, no hay una manera natural de demostrarlo. Solamente se lo debería poder demostrar a partir de hipótesis contradictorias, como en el último ejemplo que vimos. Pero tiene una regla de eliminación que dice que si se logra inferir $\bot$, de ahí puede inferirse cualquier cosa:

$$\dfrac{\bot}{\varphi} \bot$$

Con esta regla puede derivarse por ejemplo $\varphi \wedge (\neg\varphi) \to \psi$.

Reduction ad absurdum

La técnica de demostración por el absurdo también puede formalizarse. Dice que para demostrar φ, bien puedo demostrar que de $\neg\varphi$ se deriva una contradicción:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi} RAA$$

Como en el caso de la introducción del $\to$, la hipótesis $\neg\varphi$ sin techo se usa solamente para demostrar el absurdo, pero luego se concluye que φ es derivable ("a partir de nada").

Un ejemplo de demostración por el absurdo lo proporciona la siguiente derivación.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi \to \neg\varphi]_1 \quad [\neg\psi]_3}{\neg\varphi} \to E \qquad [\varphi]_2}{\bot} \to E}{\psi} RAA_3}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1$$

Las derivaciones son árboles

El siguiente ejemplo lo ilustra:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi} \wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi} \wedge E}{\psi \wedge \varphi} \wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1$$