**Clase 04/10/2013**

Tomado y editado de los apuntes de Pedro Sánchez Terraf

## Escenas de episodios anteriores

- objetivo: estudiar formalmente el concepto de demostración matemática.
- caso de estudio: lenguaje relativamente sencillo = lógica proposicional.
- lógica proposicional: sintaxis (notación) y semántica (significado).
- sintaxis.
  - definición inductiva del conjunto de proposiciones $PROP$.
  - principio de inducción sobre $PROP$.
  - esquema de recursión sobre $PROP$.
- semántica
  - tablas de verdad, asignaciones y valuaciones.
  - propiedades.
  - validez lógica ($\models \varphi$) y consecuencia lógica ($\Gamma \models \varphi$).
  - completitud funcional
- deducción natural
  - reglas de inferencia.
  - ejemplos de derivaciones.
  - las derivaciones son árboles.

# Definición de derivación

**Definición 1.** El conjunto $\mathcal{D}$ de las *derivaciones*, será el menor conjunto de árboles tal que:

($PROP$) Toda $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathcal{D}$.

($\wedge I$) Si $\begin{matrix} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{matrix}$ y $\begin{matrix} \vdots\, D_2 \\ \psi \end{matrix}$ están en $\mathcal{D}$, entonces $D := \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots\, D_2 \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$ también.

($\wedge E$) Si $\begin{matrix} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}$ está en $\mathcal{D}$, entonces $D_1 := \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\varphi} \wedge E$ y $D_2 := \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\psi} \wedge E$ también.

($\to I$) Si $\begin{matrix} \varphi \\ \vdots\, D \\ \psi \end{matrix}$ está en $\mathcal{D}$, entonces $D' := \dfrac{\begin{matrix} [\varphi] \\ \vdots\, D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I$ también está en $\mathcal{D}$.

$(\to E)$ Si $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi\to\psi\end{array}$ están en $\mathcal{D}$, entonces $D'' := \cfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\psi}\to E$ también.

$(\bot)$ Si $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}$ está en $\mathcal{D}$, entonces para toda $\varphi \in PROP$, $D' := \cfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\bot$ también.

$(RAA)$ Si $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$, entonces $D' := \cfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi}RAA$ también está en $\mathcal{D}$.

En las reglas $\to I$ y $RAA$ no es necesario que las hipótesis $\varphi$ y $\neg\varphi$ (respectivamente) aparezcan en la derivación $D$. En tal caso, las hipótesis no canceladas de la nueva derivación son las mismas que las de $D$.

## Esquema de recursión

Nuevamente nos encontramos frente a una definición inductiva. Nuevamente puede establecerse un principio de inducción y un esquema de recursión asociado a dicha definición.

El principio de inducción establece que si uno desea demostrar que una cierta propiedad $A$ vale para todas las derivaciones del conjunto $\mathcal{D}$, puede hacerlo para cada uno de los casos establecidos en la definición 1, y en cada uno de ellos puede asumirse (por hipótesis inductiva) que la propiedad $A$ que se desea probar ya vale para las subderivaciones del caso que se está considerando.

Similarmente, el esquema de recursión dice que si uno desea definir una función que toma como argumento derivaciones del conjunto $\mathcal{D}$, puede hacerlo definiendo dicha función para cada uno de los casos establecidos en la definición 1, y en cada uno de ellos puede llamarse recursivamente a la propia función que se está definiendo aplicada a las subderivaciones del caso que se está considerando.

A continuación se ven dos ejemplos de definiciones recursivas. En un par de clases veremos un ejemplo de utilización del principio de inducción.

## Ejemplos

Cada una de las derivaciones de $\mathcal{D}$ es una derivación de una cierta proposición $\varphi$ a partir de un conjunto de hipótesis. Definamos las funciones $Concl(\cdot)$, que dada una derivación devuelve la conclusión que en ella se deriva, y $Hip(\cdot)$, que dada una derivación devuelve el conjunto de hipótesis a partir de las cuales se deriva la conclusión.

En el primer caso, el de la función $Concl(\cdot)$, la definición no posee ninguna llamada recursiva:

$$Concl(\varphi) = \varphi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \varphi & \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\wedge I\right) = \varphi \wedge \psi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\wedge E\right) = \varphi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\wedge E\right) = \psi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I\right) = \varphi \to \psi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \varphi & \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E\right) = \psi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\bot\right) = \varphi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}RAA\right) = \varphi$$

Tratándose de una función recursiva, la definición de la función $Hip(\cdot)$ constituye un ejemplo más representativo de definición que sigue el esquema de recursión sobre el conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$:

$$
\begin{aligned}
Hip(\varphi) &= \{\varphi\} \\[2ex]
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi}\wedge I\right) &= Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array}\right) \cup Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \psi \end{array}\right) \\[2ex]
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi}\wedge E\right) &= Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}\right) \\[2ex]
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\psi}\wedge E\right) &= Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}\right) \\[2ex]
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots\, D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\to I\right) &= Hip\left(\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots\, D \\ \psi \end{array}\right) - \{\varphi\} \\[2ex]
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, D & \vdots\, D' \\ \varphi & \varphi \to \psi \end{array}}{\psi}\to E\right) &= Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array}\right) \cup Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D' \\ \varphi \to \psi \end{array}\right) \\[2ex]
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\bot\right) &= Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \bot \end{array}\right) \\[2ex]
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots\, D \\ \bot \end{array}}{\varphi}RAA\right) &= Hip\left(\begin{array}{c} \neg\varphi \\ \vdots\, D \\ \bot \end{array}\right) - \{\neg\varphi\}
\end{aligned}
$$

Se pueden ejecutar estas definiciones para derivaciones particulares.
Se pueden definir otras funciones por recursión.

**Definición 2.** Sean $\Gamma \subseteq PROP$, $\varphi \in PROP$. Decimos que $\varphi$ *se deriva de* $\Gamma$ (y escribimos "$\Gamma \vdash \varphi$") si y sólo si existe una derivación con conclusión $\varphi$ tal que todas sus hipótesis no canceladas estén en $\Gamma$. Diremos que $\varphi$ es un *teorema* cuando $\emptyset \vdash \varphi$, y abreviaremos por "$\vdash \varphi$".

Dicho más brevemente, $\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Concl(D) = \varphi$ y $Hip(D) \subseteq \Gamma$; y $\vdash \varphi$ si y sólo si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Concl(D) = \varphi$ y tiene todas sus hipótesis canceladas.