Clase 09/10/2013

Tomado y editado de los apuntes de Pedro Sánchez Terraf

Escenas de episodios anteriores

- objetivo: estudiar formalmente el concepto de demostración matemática.
- caso de estudio: lenguaje relativamente sencillo = lógica proposicional.
- lógica proposicional: sintaxis (notación) y semántica (significado).
- sintaxis.
  - definición inductiva del conjunto de proposiciones $PROP$.
  - principio de inducción sobre $PROP$.
  - esquema de recursión sobre $PROP$.
- semántica
  - tablas de verdad, asignaciones y valuaciones.
  - propiedades.
  - validez lógica ($\models \varphi$) y consecuencia lógica ($\Gamma \models \varphi$).
  - completitud funcional
- deducción natural
  - reglas de inferencia.
  - ejemplos de derivaciones, derivaciones como árboles.
  - definición formal de derivación, $\vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \varphi$.
  - principio de inducción y esquema de recursión.

Más conectivos, más reglas

Por completitud funcional, es posible "definir" los restantes conectivos en términos de los del conjunto reducido $\{\wedge, \to, \bot\}$. Por ejemplo, $\neg\varphi := \varphi \to \bot$ y $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Pero cuando uno hace razonamientos proposicionales en la vida real, no se restringe a este conjunto de conectivos, sino que además usa $\leftrightarrow$, $\vee$, etcétera, cada uno con sus particulares reglas de inferencia. La forma en que uno deduce un $\varphi \leftrightarrow \psi$ es partir de φ y llegar a ψ y viceversa. Esto lo podríamos condensar en una regla de introducción de $\leftrightarrow$:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I.$$

Nos harían falta también reglas de eliminación. Éstas tienen la misma forma que $(\to E)$:

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow E \qquad \dfrac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi} \leftrightarrow E.$$

Las reglas para la disyunción son las siguientes:

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\vee E.$$

Las reglas de introducción de la disyunción son muy intuitivas: una vez demostrada una proposición, con mayor razón puedo concluir que ella u otra vale. La regla $(\vee E)$ es un modelo de *prueba por casos*: si puedo probar χ cuando φ es cierta, y también puedo hacerlo cuando ψ es cierta, entonces puedo probar χ bajo la única suposición de que alguna de las dos es cierta (i.e., que $\varphi \vee \psi$ es cierta).

Por último, ponemos dos reglas más relativas a la negación, que el lector reconocerá (de igual modo a las de $\leftrightarrow$) como abreviaciones de derivaciones ya hechas previamente:

$$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\neg E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\neg I$$

La extensión de la definición formal del conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$ se puede hacer como sigue:

$(\leftrightarrow I)$ Dadas $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\, D' \\ \varphi\end{array}$ en $\mathcal{D}$, la siguiente

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D \\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\, D' \\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\leftrightarrow I,$$

es una derivación en $\mathcal{D}$.

$(\leftrightarrow E)$ Si $\begin{array}{c}\vdots\, D_1 \\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots\, D_2 \\ \psi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}$ son derivaciones, entonces

$$D' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1 \\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\psi}\leftrightarrow E \qquad D'' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_2 \\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\varphi}\leftrightarrow E$$

pertenecen a $\mathcal{D}$.

$(\neg I)$ Dada $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D \\ \bot\end{array}$ en $\mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\neg I$ está en $\mathcal{D}$.

$(\neg E)$ Si tenemos derivaciones $\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D' \\ \neg\varphi\end{array}$ entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D' \\ \neg\varphi\end{array}}{\bot}\neg E$ pertenece a $\mathcal{D}$.

($\vee I$) Si $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$ está en $\mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee I$ también lo está. Si $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}$ está en $\mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee I$ también lo está.

($\vee E$) Dadas $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\vee\psi\end{array}$, $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array}$ en $\mathcal{D}$, la siguiente

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\vee\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array}}{\chi}\vee E,$$

es una derivación de $\mathcal{D}$.

Nota 1. Tener mucho cuidado cuando se aplica la regla $\leftrightarrow I$: la hipótesis φ se cancela en la primera subderivación (es decir, D), *pero* **no** *en la segunda (D')*. Lo mismo se aplica para $\vee E$.

Como un ejemplo de derivación usando todas las reglas introducidas, demostraremos la equivalencia clásica entre la implicación $\varphi\to\psi$ y la "implicación material", $\neg\varphi\vee\psi$.

Ejemplo 1. Ver que $\vdash(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\neg\varphi\vee\psi)$. Es natural suponer que la última regla aplicada va a ser la introducción de $\leftrightarrow$, así que de ese modo comenzamos nuestra derivación:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi\to\psi]\\ \vdots\, D_1\\ \neg\varphi\vee\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi\vee\psi]\\ \vdots\, D_2\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\varphi\to\psi\leftrightarrow\neg\varphi\vee\psi}\leftrightarrow I$$

El lado izquierdo necesita una aplicación de la reducción al absurdo:

$$D_1 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad \boxed{\varphi\to\psi}}{\psi}\to E}{\neg\varphi\vee\psi}\vee I \qquad [\neg(\neg\varphi\vee\psi)]_2}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1}{\neg\varphi\vee\psi}\vee I \qquad [\neg(\neg\varphi\vee\psi)]_2}{\bot}\neg E}{\neg\varphi\vee\psi}RAA_2$$

D_1 tiene como única hipótesis no cancelada a $\varphi\to\psi$ y $Concl(D_1)=\neg\varphi\vee\psi$, así que nos sirve

El lado derecho es el más fácil:

$$D_2 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\boxed{\neg\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_3 \quad [\varphi]_4}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,\bot \qquad [\psi]_3}{\psi}\,\vee E_3}{\varphi \to \psi}\,\to I_4$$

También D_2 tiene las propiedades requeridas, así que

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi \to \psi]_5\\ \vdots\, D_1\\ \neg\varphi \vee \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi \vee \psi]_5\\ \vdots\, D_2\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\varphi \to \psi \leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi}\,\leftrightarrow I_5$$

es la derivación que andábamos buscando (donde cancelamos las hipótesis recuadradas).

Extensión de las definiciones recursivas de la clase pasada

La clase pasada definimos la función $Concl(\cdot) : \mathcal{D} \to PROP$. Como acabamos de extender el conjunto $\mathcal{D}$, completamos la definición:

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\, D'\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\,\leftrightarrow I,\right) \;=\; \varphi \leftrightarrow \psi \qquad Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\psi}\,\leftrightarrow E\right) \;=\; \psi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\varphi}\,\leftrightarrow E\right) \;=\; \varphi \qquad Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,\neg I\right) \;=\; \neg\varphi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot}\,\neg E\right) \;=\; \bot \qquad Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\,\vee I\right) \;=\; \varphi \vee \psi$$

$$Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\,\vee I\right) \;=\; \varphi \vee \psi \qquad Concl\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \vee \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\vee E\right) \;=\; \chi$$

También extendemos la definición de la función recursiva $Hip(\cdot) : \mathcal{D} \to \mathcal{P}(PROP)$:

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\, D'\\ \varphi\end{array}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\leftrightarrow I,\right) = \left(Hip\left(\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}\right)-\{\varphi\}\right)\cup\left(Hip\left(\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\, D'\\ \varphi\end{array}\right)-\{\psi\}\right)$$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\psi}\leftrightarrow E\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi\end{array}\right)\cup Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}\right)$$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\varphi}\leftrightarrow E\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \psi\end{array}\right)\cup Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}\right)$$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\neg I\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}\right)-\{\varphi\}$$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot}\neg E\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}\right)\cup Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \neg\varphi\end{array}\right)$$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee I\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}\right)$$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee I\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}\right)$$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\vee\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array}}{\chi}\vee E\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\vee\psi\end{array}\right)\cup\left(Hip\left(\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array}\right)-\{\varphi\}\right)\cup\left(Hip\left(\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array}\right)-\{\psi\}\right)$$

Hacer también alguna de las siguientes derivaciones:

$$\begin{array}{ccccc}\vdash\neg\neg(\varphi\vee\neg\varphi) & \vdash\varphi\vee\neg\varphi & \vdash\varphi\to\varphi\vee\psi & \vdash\psi\to\varphi\vee\psi & \vdash\varphi\wedge\psi\to\varphi\\ \vdash\varphi\wedge\psi\to\psi & \vdash\bot\to\varphi & \vdash\varphi\to\top & \vdash\varphi\vee\neg\varphi\leftrightarrow\top & \vdash\varphi\wedge\neg\varphi\leftrightarrow\bot\end{array}$$

si $\vdash\varphi\to\chi$ y también $\vdash\psi\to\chi$ entonces $\vdash\varphi\vee\psi\to\chi$

si $\vdash\chi\to\varphi$ y también $\vdash\chi\to\psi$ entonces $\vdash\chi\to\varphi\wedge\psi$

$$\vdash\varphi\wedge(\psi\vee\chi)\leftrightarrow(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)$$

$\vdash\cdot\to\cdot$ es reflexiva, transitivia y algo así como antisimétrica.