Clase 11/10/2013

Tomado y editado de los apuntes de Pedro Sánchez Terraf

Escenas de episodios anteriores

- objetivo: estudiar formalmente el concepto de demostración matemática.
- caso de estudio: lenguaje relativamente sencillo = lógica proposicional.
- lógica proposicional: sintaxis (notación) y semántica (significado).
- sintaxis.
  - definición inductiva del conjunto de proposiciones $PROP$.
  - principio de inducción sobre $PROP$.
  - esquema de recursión sobre $PROP$.
- semántica
  - tablas de verdad, asignaciones y valuaciones.
  - propiedades.
  - validez lógica ($\models \varphi$) y consecuencia lógica ($\Gamma \models \varphi$).
  - completitud funcional
- deducción natural
  - reglas de inferencia.
  - ejemplos de derivaciones, derivaciones como árboles.
  - definición formal de derivación, $\vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \varphi$.
  - principio de inducción y esquema de recursión.
  - conectivos $\neg$, $\leftrightarrow$ y $\vee$.
  - $PROP$ parece un poset.

Teorema de Correctitud

Vimos numerosos ejemplos de derivaciones. Para demostrar que $\Gamma \vdash \varphi$ vale, se construye una derivación de φ a partir de las hipótesis de Γ. Pero ¿cómo hacemos para demostrar que $\Gamma \vdash \varphi$ no vale? Es decir, que no hay ninguna derivación posible. Por ejemplo, ¿hay alguna derivación de $\vdash \bot$? Rápidamente podemos observar que ninguna regla de introducción permite obtener $\bot$ como conclusión. Pero las reglas de eliminación, y la regla RAA, permiten conclusiones de cualquier forma, en particular puede ser $\bot$. Para obtener a través de una de estas reglas una derivación de $\bot$, habría que obtener derivaciones de sus premisas. Por ejemplo, de usarse la regla RAA, debería ser:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg\bot \\ \vdots\, D \\ \bot\end{array}}{\bot}\,RAA$$

y ahora habría que construir la derivación D de $\perp$ a partir de $\neg\perp$. ¿Existirá una tal derivación? Estas preguntas son difíciles de responder con un enfoque puramente sintáctico como el de arriba.

A continuación veremos el Teorema de Correctitud que nos permitirá deducir que $\nvdash \perp$ de $\not\models \perp$, que vale por definición.

El teorema de correctitud es mucho más que una herramienta para responder este tipo de preguntas: dicho teorema dice que las derivaciones sólo nos permiten deducir resultados lógicamente válidos, es decir, que están justificados por el significado de las proposiciones.

Dicho teorema relaciona $\Gamma \vdash \varphi$ con $\Gamma \models \varphi$. Veremos que ambos conceptos, por definición diferentes, resultan equivalentes. La prueba consiste de dos implicaciones: $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi$ (correctitud) expresa que deducción natural es correcta, sólo nos permite inferir resultados válidos; $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$ (completitud) expresa que permite inferir **todos** los resultados válidos.

Teorema 1 (Corrección)**.** *Si* $\Gamma \vdash \varphi$*, entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

Demostración. Probaremos por inducción en derivaciones el siguiente enunciado:

> "Para toda $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}$ se da lo siguiente: Si Γ es tal que $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models \varphi$".

(PROP) Supongamos $D = \varphi$. Si $\mathit{Hip}(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma$, tenemos $\varphi \in \Gamma$, e inmediatamente $\Gamma \models \varphi$.

($\wedge I$) Supongamos que $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi'\end{array}$ satisfacen la hipótesis inductiva, y supongamos que las hipótesis no canceladas de $D'' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I$ están incluidas en Γ. Como $\mathit{Hip}(D'') = \mathit{Hip}(D) \cup \mathit{Hip}(D')$, Γ contiene tanto las hipótesis de D como las de D', así que $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \varphi'$ por hipótesis inductiva. Sea f una asignación tal que $[\![\Gamma]\!]_f = 1$. Luego obtenemos $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi']\!]_f = 1$, y por definición tenemos $[\![\varphi\wedge\varphi']\!]_f = 1$. Como f era arbitraria, se sigue que $\Gamma \models \varphi \wedge \varphi'$.

($\wedge E$) Supongamos que $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}$ satisface la hipótesis inductiva y tomemos

$$D_1 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E.$$

Veamos el caso de D_1; sea Γ que contenga $\mathit{Hip}(D_1)$. Como $\mathit{Hip}(D_1) = \mathit{Hip}(D)$, sabemos (por hip. ind.) que $\Gamma \models \varphi \wedge \varphi'$. Sea f una asignación tal que $[\![\Gamma]\!]_f = 1$. Tenemos entonces que $[\![\varphi \wedge \varphi']\!]_f = 1$, y por definición de valuación, $[\![\varphi]\!]_f = 1$. Como f era una asignación de Γ arbitraria, esto muestra que $\Gamma \models \varphi$. El caso de D_2 es igual.

$(\to I)$ Supongamos que $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}$ satisface la hipótesis inductiva.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Veamos que la derivación D' de la derecha también la satisface. Sea Γ conteniendo las hipótesis de D', es decir, Γ contiene las hipótesis de D menos φ. Tomemos ahora $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$; Γ' contiene todas las hipótesis de D. Por hip. ind., $\Gamma' \models \psi$. Sea f tal que $[\![\Gamma]\!]_f = 1$. Si suponemos que $[\![\varphi]\!]_f = 1$, f es también una asignación tal que $[\![\Gamma']\!]_f = 1$, y por ende $[\![\psi]\!]_f = 1$, así que se da $[\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$. Si $[\![\varphi]\!]_f = 0$ también se da $[\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$, y en consecuencia $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

$(\to E)$ Sean $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi \to \psi\end{array} \in \mathcal{D}$ satisfaciendo la hip. ind. Sea $D'' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \to E$

y supongamos que Γ contiene $Hip(D'')$. Como $Hip(D'')$ es el conjunto formado por las hipótesis de D y las de D', Γ contiene a estas últimas; por hip. ind., $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \varphi \to \psi$. Sea f tal que $[\![\Gamma]\!]_f = 1$. Luego $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$. Por definición, $1 = [\![\varphi \to \psi]\!]_f = \text{máx}(1 - [\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f) = \text{máx}(0, [\![\psi]\!]_f) = [\![\psi]\!]_f$. Como f era arbitraria, $\Gamma \models \psi$.

(RAA) Sea $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$ satisfaciendo la hip. ind. Sea Γ conteniendo las

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]_1\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi} RAA_1$$

hipótesis de D' de la derecha; análogamente al caso $(\to I)$, Γ contiene las hipótesis de D menos $\neg\varphi$. Supongamos (por el absurdo) que $\Gamma \not\models \varphi$; luego hay una valuación f tal que $[\![\Gamma]\!]_f = 1$ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$, y en consecuencia $[\![\neg\varphi]\!]_f = 1$. En resumen f es una asignación tal que $[\![\Gamma']\!]_f = 1$, con $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Γ' contiene todas las hipótesis de D. Por hip. ind., $\Gamma' \models \bot$. Pero entonces se debería dar $[\![\bot]\!]_f = 1$, una contradicción. En consecuencia, $\Gamma \models \varphi$.

$(\bot)$ Sea $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}$ que satisfaga la hip. ind., y sea $\varphi \in PROP$. La derivación $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi} \bot \in \mathcal{D}$

tiene las mismas hipótesis que D. El razonamiento es similar al caso (RAA), pero sin hacerse problemas con hipótesis canceladas. Queda como ejercicio muy fácil para el lector.

$\square$