Clase 16/10/2013

Tomado y editado de los apuntes de Pedro Sánchez Terraf

Escenas de episodios anteriores

- objetivo: estudiar formalmente el concepto de demostración matemática.
- caso de estudio: lenguaje relativamente sencillo = lógica proposicional.
- lógica proposicional: sintaxis (notación) y semántica (significado).
- sintaxis.
  - definición inductiva del conjunto de proposiciones $PROP$.
  - principio de inducción sobre $PROP$.
  - esquema de recursión sobre $PROP$.
- semántica
  - tablas de verdad, asignaciones y valuaciones.
  - propiedades.
  - validez lógica ($\models \varphi$) y consecuencia lógica ($\Gamma \models \varphi$).
  - completitud funcional
- deducción natural
  - reglas de inferencia.
  - ejemplos de derivaciones, derivaciones como árboles.
  - definición formal de derivación, $\vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \varphi$.
  - principio de inducción y esquema de recursión.
  - conectivos $\neg$, $\leftrightarrow$ y $\vee$.
  - $PROP$ parece un poset.
  - definición recursiva de la función Hip.
  - demostración por inducción de $\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \models \varphi$ (corrección)

Completitud de deducción natural

Relacionamos conjuntos de proposiciones Γ y proposiciones φ con las siguientes relaciones: $\varphi \in \Gamma$, $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \models \varphi$. Estas tres relaciones tienen significados diferentes: la primera dice simplemente que φ es una de las proposiciones del conjunto Γ, la segunda, que φ es derivable a partir de Γ y la última, que φ es verdadera siempre que Γ lo sea.

Sabemos que se cumplen las siguientes implicaciones:

$$\boxed{\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \qquad \varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \models \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi}$$

Las primeras dos son triviales: la primera dice que si A es una de las hipótesis, entonces puede derivarse, mientras que la segunda dice que si A es una de las hipótesis, entonces es verdadera cada vez que las hipótesis lo son. Los recíprocos de estas dos en general no valen: basta tomar cualquier Γ finito, y comprobar que de él se pueden derivar infinitas conclusiones y consecuencias lógicas.

La tercera no es elemental, pero fue demostrada la clase pasada y significa que deducción natural es correcto: toda derivación permite demostrar juicios lógicamente válidos. Su recíproco sí vale, pero no es trivial, justamente todo el trabajo de hoy será para demostrar dicho recíproco.

Para la demostración se define cuándo un conjunto de proposiciones Γ es *consistente*, intuitivamente, cuando no permite que se infieran contradicciones a partir de él:

Definición 1. Un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ es *inconsistente* si y sólo si $\Gamma \vdash \bot$. Γ es *consistente* si no es inconsistente.

Esto parece un caso particular de lo que se decía más arriba; Γ consistente si no puedo deducir a partir de él *una* ($\bot$) contradicción, pero es totalmente general, como lo muestra el siguiente

Lema 2 (de Inconsistencia)**.** *Son equivalentes*

1. Γ *es inconsistente.*
2. *Existe* $\varphi \in PROP$ *tal que* $\Gamma \vdash \neg\varphi$ *y* $\Gamma \vdash \varphi$*.*
3. *Para toda* $\varphi \in PROP$ *se da* $\Gamma \vdash \varphi$*.*

Demostración. Es obvio que $3 \Rightarrow 2$. También $2 \Rightarrow 1$ sale fácil: supongamos que $\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D' \\ \neg\varphi\end{array}$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D' \\ \neg\varphi\end{array}}{\bot} \to E$$

tienen sus hipótesis no canceladas en Γ (i.e., $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Hip(D') \subseteq \Gamma$). Luego (teniendo en cuenta que $\neg\varphi = \varphi \to \bot$) la derivación de la izquierda tiene conclusión $\bot$ e hipótesis en Γ. La prueba de $1 \Rightarrow 3$ utiliza la regla de $\bot$. $\square$

Lema 3.

1. *Si* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente entonces* $\Gamma \vdash \varphi$*.*
2. *Si* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente entonces* $\Gamma \vdash \neg\varphi$*.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Lema 4 (Criterio de Consistencia)**.** *Si hay una asignación f tal que $[\![\psi]\!]_f = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$, entonces Γ es consistente.*

Demostración. Por corrección, si valiera $\Gamma \vdash \bot$ debería valer también $\Gamma \models \bot$. Por las hipótesis del Lema, tendríamos $[\![\Gamma]\!]_f = 1$, y $[\![\bot]\!]_f = 1$ que es absurdo. Luego $\Gamma \nvdash \bot$. $\square$

No confundir el Lema 4 con su recíproco, que dice que si Γ es consistente entonces existe una asignación f que hace verdaderas las proposiciones de Γ y recién podrá demostrarse al final de la clase de hoy, como Lema 9.

Ejemplo 1. Probemos que $\Gamma := \{p_0 \to p_1,\ \neg p_2 \to p_0,\ p_5 \wedge \neg p_0\}$ es consistente. Para ello, basta encontrar una asignación de dicho conjunto.

Sea $f : \mathcal{V} \to \{0,1\}$ definida de la siguiente manera: $f(p_i) = 1$ si y sólo si $i \in \{2,5\}$. Vemos que esta asignación es de Γ:

$$\begin{array}{rcl}
[\![p_0 \to p_1]\!]_f &=& \text{máx}(1 - [\![p_0]\!]_f, [\![p_1]\!]) \\
&=& \text{máx}(1,0) \\
&=& 1 \\
[\![p_5 \wedge \neg p_0]\!]_f &=& \text{mín}\{[\![p_5]\!]_f, 1 - [\![p_0]\!]_f\} \\
&=& \text{mín}\{1, 1-0\} \\
&=& 1 \\
[\![\neg p_2 \to p_0]\!]_f &=& \text{máx}(1 - [\![\neg p_2]\!]_f, [\![p_0]\!]_f) \\
&=& \text{máx}(1-0, 0) \\
&=& 1
\end{array}$$

Definición 5. Un conjunto Γ es *consistente maximal* si y sólo si es consistente y para todo $\Gamma' \supseteq \Gamma$, si Γ' también es consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$.

Ejemplo 2. Dada una asignación f, el conjunto $\Gamma_f := \{\varphi \in \mathit{PROP} \ : \ [\![\varphi]\!]_f = 1\}$ es un conjunto consistente maximal. Por el Lema 4, Γ_f es consistente. Consideremos un Γ consistente y que contenga a Γ_f, es decir, $\Gamma_f \subseteq \Gamma$. Veamos que también vale $\Gamma \subseteq \Gamma_f$. Sea $\psi \in \Gamma$ arbitrario. Si $[\![\psi]\!]_f = 0$, entonces $[\![\neg\psi]\!]_f = 1$ y $\neg\psi \in \Gamma_f \subseteq \Gamma$, y Γ resulta inconsistente, imposible. Luego $[\![\psi]\!]_f = 1$ y $\psi \in \Gamma_f$.

Este ejemplo de conjunto consistente maximal aparenta ser muy específico; sin embargo, como se verá más adelante, tiene toda la generalidad posible.

Lema 6. *Si Γ es consistente maximal entonces es cerrado por derivaciones (i.e., $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$).*

Demostración. Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$, y en busca de un absurdo supongamos que $\varphi \notin \Gamma$. Luego $\Gamma \cup \{\varphi\}$ debe ser inconsistente. Entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$ por el Lema 3, así que Γ es inconsistente por el Lema 2. Absurdo. □

Esta propiedad de los conjuntos consistentes maximales es de sumo interés. Resumimos en un nuevo recuadro lo que conocemos (c.m. = consistente maximal y i. = inconsistente):

$\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$	$\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \models \varphi$	$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
Γ c.m. y $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$	$\Gamma \cup \{\varphi\}$ i. $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ i. $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

El siguiente lema se puede explicar diciendo que un conjunto consistente maximal "realiza" los conectivos $\neg$ y $\to$.

Lema 7. *Sea Γ consistente maximal. Luego*

1. *para toda φ, $\neg\varphi \in \Gamma$ si y sólo si $\varphi \notin \Gamma$.*

2. *para todas φ, ψ, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma]$.*

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Si $\neg\varphi$ está en Γ, entonces φ no puede puesto que sería inconsistente.

   ($\Leftarrow$) Si φ no está, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente (por ser Γ maximal). Por los lemas 3 y 6, $\neg\varphi \in \Gamma$.

2. ($\Rightarrow$) Supongamos $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$, veamos que se da la implicación entre corchetes. Para ello, supongamos $\varphi \in \Gamma$. Ahora, con hipótesis $(\varphi \to \psi)$ y φ puedo derivar ψ. Como Γ es cerrado por derivaciones (Lema 6), tenemos que $\psi \in \Gamma$. Obtuvimos entonces $[\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma]$.

   ($\Leftarrow$) Supongamos cierta la implicación. Hacemos dos casos.

   a) Si $\varphi \in \Gamma$, tenemos que $\psi \in \Gamma$ por la implicación. En particular, $\Gamma \vdash \psi$, así que podemos asegurar $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$. El Lema 6 nos asegura entonces $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.

   b) Si $\varphi \notin \Gamma$, entonces $\neg\varphi \in \Gamma$ (por lo probado anteriormente). Podemos derivar $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$, y como es cerrado por derivaciones, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.

$\square$

Ejercicio 1. Demostrar que los conjuntos consistentes maximales realizan la conjunción y la disyunción.

Lema 8. *Todo conjunto consistente* Γ *está contenido en uno maximal* Γ^*.

Demostración. Las proposiciones forman un conjunto *numerable*, es decir, se puede hacer una lista $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ (con subíndices todos los números naturales) en la cual aparecen todas las proposiciones. Definiremos una sucesión no decreciente de conjuntos Γ_i tal que la unión es consistente maximal.

$$\Gamma_0 := \Gamma,$$
$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si resulta consistente} \\ \Gamma_n & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
$$\Gamma^* := \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$$

Se puede probar por inducción en n que cada Γ_n es consistente (por construcción, Γ_0 es consistente; y si Γ_n es consistente, Γ_{n+1} es consistente, pues alguna de las dos opciones se da). Se puede demostrar que Γ^* es consistente maximal.

$\square$

Lema 9. *Si* Γ *es consistente, entonces existe una asignación* f *tal que* $[\![\psi]\!]_f = 1$ *para toda* $\psi \in \Gamma$.

Demostración. Por el Lema 8, Γ está contenido en algún Γ^* maximal. Definamos: $f(p_i) :=$ 1 si y sólo si $p_i \in \Gamma^*$. Veremos por inducción que $[\![\varphi]\!]_f = 1$ si y sólo si $\varphi \in \Gamma^*$.

$\boxed{\varphi \in At}$ Vale por construcción de f y porque $\bot \notin \Gamma*$ porque es consistente.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$

$$\begin{aligned} [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f = 1 \quad & \text{si y sólo si} \quad [\![\varphi]\!]_f = 1 \text{ y } [\![\psi]\!]_f = 1 && \text{por definición de valuación} \\ & \text{si y sólo si} \quad \varphi, \psi \in \Gamma^* && \text{por hipótesis inductiva} \\ & \text{si y sólo si} \quad (\varphi \wedge \psi) \in \Gamma^* && \text{por Ejercicio 1} \end{aligned}$$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$

$$\begin{array}{llll} [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 0 & \text{si y sólo si} & [\![\varphi]\!]_f = 1 \text{ y } [\![\psi]\!]_f = 0 & \text{por definición de valuación} \\ & \text{si y sólo si} & \varphi \in \Gamma^* \text{ y } \psi \notin \Gamma^* & \text{por hipótesis inductiva} \\ & \text{si y sólo si} & \text{no se da: } [\varphi \in \Gamma^* \text{ implica } \psi \in \Gamma^*] & \\ & \text{si y sólo si} & (\varphi \to \psi) \notin \Gamma^* & \text{por el Lema 7} \end{array}$$

Como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, tenemos $[\![\psi]\!]_f = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$. □

Corolario 10. $\Gamma \nvdash \varphi$ *implica que hay una asignación* f *tal que* $[\![\psi]\!]_f = 1$ *para todo* $\psi \in \Gamma$ *y* $[\![\varphi]\!]_f = 0$.

Demostración.

$$\begin{array}{lll} \Gamma \nvdash \varphi & \text{implica} & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es consistente} \qquad \text{(por el Lema 3)} \\ & \text{si y sólo si} & \text{hay asignación } f \text{ tal que } [\![\psi]\!]_f = 1 \text{ para toda } \psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \\ & \text{si y sólo si} & \text{hay asignación } f \text{ tal que } [\![\psi]\!]_f = 1 \text{ para toda } \psi \in \Gamma \text{ y } [\![\varphi]\!]_f = 0. \end{array}$$

Queda demostrada la implicación. □

Prueba de Completitud. Supongamos $\Gamma \models \varphi$. Luego, para toda asigación f tal que $[\![\psi]\!]_f = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$, se da $[\![\varphi]\!]_f = 1$. Esto equivale a decir que no hay valuación tal que $[\![\psi]\!]_f = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$. Por la contrarrecíproca al corolario anterior, obtenemos que no se puede dar $\Gamma \nvdash \varphi$, es decir, obtenemos $\Gamma \vdash \varphi$. □