Clase 18/10/2013

Tomado y editado de los apuntes de Pedro Sánchez Terraf

Escenas de episodios anteriores

- objetivo: estudiar formalmente el concepto de demostración matemática.
- caso de estudio: lenguaje relativamente sencillo = lógica proposicional.
- lógica proposicional: sintaxis (notación) y semántica (significado).
- sintaxis.
    - definición inductiva del conjunto de proposiciones $PROP$.
    - principio de inducción sobre $PROP$.
    - esquema de recursión sobre $PROP$.
- semántica
    - tablas de verdad, asignaciones y valuaciones.
    - propiedades.
    - validez lógica ($\models \varphi$) y consecuencia lógica ($\Gamma \models \varphi$).
    - completitud funcional
- deducción natural
    - reglas de inferencia.
    - ejemplos de derivaciones, derivaciones como árboles.
    - definición formal de derivación, $\vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \varphi$.
    - principio de inducción y esquema de recursión.
    - conectivos $\neg$, $\leftrightarrow$ y $\vee$.
    - $PROP$ parece un poset.
    - definición recursiva de la función Hip.
    - demostración por inducción de $\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \models \varphi$ (corrección)
    - demostración de $\Gamma \models \varphi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ (completitud)

Reticulados y Lógica

Un libro para consultar acerca de esta sección es *Introduction to Lattices and Order*, de B. A. Davey y H. A. Priestley (Cambridge Mathematical Texts), en el capítulo 7.

Uno se preguntará ahora, ¿por qué el ínfimo de un álgebra de Boole se denota con el mismo símbolo que la conjunción ("$\wedge$")? Si la lógica corresponde a las álgebras de Boole, ¿que significan los filtros, los filtros primos?

Antes de abordar estas cuestiones, repasemos un par de ejercicios de Deducción Natural, algunos de ellos muy triviales:

Ejercicios

Probar las siguientes afirmaciones.

1. *a*) $\vdash \varphi \to \varphi$.
   b) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.
   c) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \chi$ entonces $\vdash \varphi \to \chi$.

2. *a*) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$.
   b) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$.
   c) Si $\vdash \chi \to \varphi$ y $\vdash \chi \to \psi$ entonces $\vdash \chi \to \varphi \wedge \psi$.

3. *a*) $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$.
   b) $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$.
   c) Si $\vdash \varphi \to \chi$ y $\vdash \psi \to \chi$ entonces $\vdash \varphi \vee \psi \to \chi$.

4. *a*) $\vdash \varphi \to \top$, $\vdash \bot \to \varphi$.
   b) $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \leftrightarrow \bot$.
   c) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi \leftrightarrow \top$.

5. $\vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \to (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$,

$PROP$ como poset

Con todos los elementos de la sección anterior, basta hacer un pequeño acto de abstracción para probar que "está todo conectado". Definamos una relación $\preccurlyeq$ en $PROP$ de la siguiente manera:

$\varphi \preccurlyeq \psi$ si y sólo si $\vdash \varphi \to \psi$.

Ahora bien, esta relación resulta reflexiva por el ejercicio $1a$ y transitiva por el ejercicio $1c$. No es antisimétrica, pues tenemos $(p_0 \wedge \neg p_0) \preccurlyeq \bot$ y $\bot \preccurlyeq (p_0 \wedge \neg p_0)$ y sin embargo $\bot \neq (p_0 \wedge \neg p_0)$. Lo que sí sabemos es que $\vdash \bot \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0$, así que si consideráramos dos proposiciones equivalentes (es decir, que se pueda derivar la proposición que afirma "una si y solo si la otra") como idénticas, tendríamos la antisimetría.

Definición 1. Sea $\approx$ la relación de equivalencia dada por $\varphi \approx \psi$ si y sólo si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Definamos $\overline{\varphi}$ como la clase de equivalencia correspondiente a φ según la relación $\approx$.

Ejercicio 1. Demostrar que la relación $\approx$ es efectivamente una relación de equivalencia.

Llamaremos $\overline{PROP}$ al conjunto de clases de equivalencia de la relación $\approx$, y denotaremos $\overline{\varphi}$ a la clase de equivalencia de φ. Por ejemplo, tenemos $\overline{\bot} = \overline{p_0 \wedge \neg p_0}$ (pues $\vdash \bot \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0$). Para verlo de una forma más simple, usamos el símbolo $\overline{\varphi}$ para poder trabajar normalmente con φ, pero se la puede reemplazar indistintamente por cualquier ψ tal que $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Se puede ahora extender la definición de $\preccurlyeq$ a $\overline{PROP}$, y se hace de la manera obvia.

Definición 2. Diremos que $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ si $\varphi \preccurlyeq \psi$.

Para ver que esta definición es *buena*, necesitamos un resultado más:

Ejercicio 2. Supongamos $\varphi \approx \psi$ y $\chi \approx \theta$. Entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$ si y sólo si $\psi \preccurlyeq \theta$. (Ayuda: reemplazando $\approx$ y $\preccurlyeq$ por sus definiciones respectivas, este ejercicio pide demostrar: "Dadas dos derivaciones D y D' con todas sus hipótesis canceladas y conclusión $\varphi \leftrightarrow \psi$ y $\chi \leftrightarrow \theta$, probar: existe $D_1 \in \mathcal{D}$ con $Hip(D_1) = \emptyset$ y conclusión $\varphi \to \chi$ si y sólo si existe $D_2 \in \mathcal{D}$ con $Hip(D_2) = \emptyset$ con conclusión $\psi \to \theta$".)

Las propiedades que vimos de la relación $\preccurlyeq$ siguen valiendo si ponemos "$\overline{\cdots}$" en todos lados; decimos que $\preccurlyeq$ es *preservada* por $\approx$. Por ejemplo, por el ejercicio $1a$, tenemos:

Para toda φ, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$.

El ejercicio $1c$, por su parte, nos dice que $\preccurlyeq$ es transitiva:

Para todas φ, ψ y χ, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y , $\overline{\psi} \preccurlyeq \overline{\chi}$ implican , $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi}$.

Volviendo a la antisimetría, el ejercicio $1b$ nos dice que si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ obtenemos $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Esto quiere decir que $\varphi \approx \psi$ y luego están en la misma clase de equivalencia, $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$:

Si $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y $\overline{\psi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$, entonces $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$.

En resumen: $\preccurlyeq$ define una relación de orden en $PROP$, una vez que identificamos cosas equivalentes. ¿Cómo es este poset? (o mejor, ¿para qué nos mandaron a hacer el resto de los ejercicios?).

El Álgebra de Lindenbaum

Traduciendo los ejercicios restantes, obtenemos lo siguiente. Los ejercicios $2a$ y $2b$ nos dicen que la conjunción de dos proposiciones es una cota inferior de las mismas:

Para todas φ, ψ, $\overline{\varphi \wedge \psi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$ y $\overline{\varphi \wedge \psi} \preccurlyeq \overline{\psi}$,

y el ejercicio $2c$ dice que es mayor o igual que cualquier cota:

Si $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\psi}$, entonces $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Juntando todo, tenemos que efectivamente $\overline{\varphi \wedge \psi}$ es el ínfimo entre $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$ en $\overline{PROP}$. Con esto hemos demostrado que es lícito escribir $\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$.

Por otro lado, traduciendo correspondientemente los ejercicios 3 deducimos que $\vee$ nos fabrica el supremo, y también vimos que distribuye con el ínfimo.

Por último, viendo los ejercicios $4a$, $4b$ y $4c$ obtenemos las siguientes propiedades:

Para toda φ, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\top}$ y $\overline{\bot} \preccurlyeq \overline{\varphi}$.

$\overline{\varphi} \wedge \overline{\neg\varphi} = \overline{\bot}$, $\overline{\varphi} \vee \overline{\neg\varphi} = \overline{\top}$.

Es decir, $\overline{\top}$ y $\overline{\bot}$ son respectivamente los elementos máximo y mínimo de $\overline{PROP}$, y $\overline{\neg\varphi}$ cumple el rol de complemento. En suma, no sólo $\overline{PROP}$ es un poset, sino que también es un álgebra de Boole $\langle \overline{PROP}, \wedge, \vee, \neg, \overline{\bot}, \overline{\top} \rangle$, que se llama *álgebra de Lindenbaum*.