

Autómatas Finitos Determinísticos (DFA)

Introducción a la Lógica
Fa.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba

16/10/15

Introducción

Autómata Finito Determinístico (DFA)

Lenguajes y Autómatas

Info útil

Bibliografía:

- *Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación.*
 - Autores: Hopcroft, John E; Ullman, Jeffrey D.
 - Ubicación en Biblioteca: C C1.3 H791.
- Apunte de la cátedra.
 - <http://www.cs.famaf.unc.edu.ar/wiki/lib/exe/fetch.php?media=intrologica:automatas2015-1.pdf>

Temas del día

- 1 **Introducción**
 - Modelos de Computación

- 2 **Autómata Finito Determinístico (DFA)**
 - Intuiciones
 - Definición

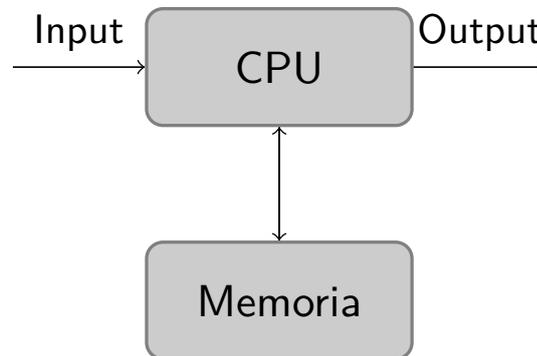
- 3 **Lenguajes y Autómatas**
 - Lenguajes

Modelos de Computación

- **Modelo de computación:** es un modelo matemático que aproxima el funcionamiento de una computadora.
- Sirven para estudiar sus **capacidades** y **limitaciones**.
 - **Computabilidad:** ¿Qué problemas puede resolver una computadora?
 - **Complejidad:** ¿Cuáles son los problemas computacionalmente difíciles?
- Existen diferentes modelos de computación:
 - Máquinas de Turing (Turing - 1936)
 - Cálculo Lambda (Church - 1936)
 - Autómatas Finitos (Rabin y Scott - 1950)
 -
- Diferente poder de cómputo.

Modelo General de Máquina

- En su forma mas básica:

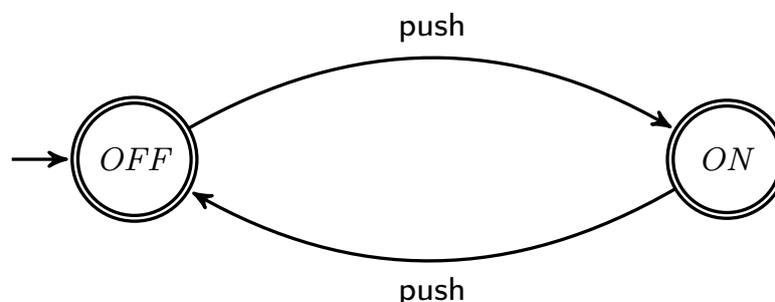


- El tipo de memoria afecta el poder computacional.
 - Sin memoria: Autómatas finitos.
 - Con una pila como memoria: Push Down Automatas.
 - Con memoria de acceso aleatorio: Maquinas de Turing.
- En esta materia estudiaremos los **Autómatas Finitos**.

Intuiciones I

- Es común **modelar** sistemas como:
 - conjunto de **estados**, y
 - **acciones** que llevan de un estado a otro.
- **Estado**: Es una parte relevante de la historia del sistema.

Ejemplo: Interruptor (o switch)



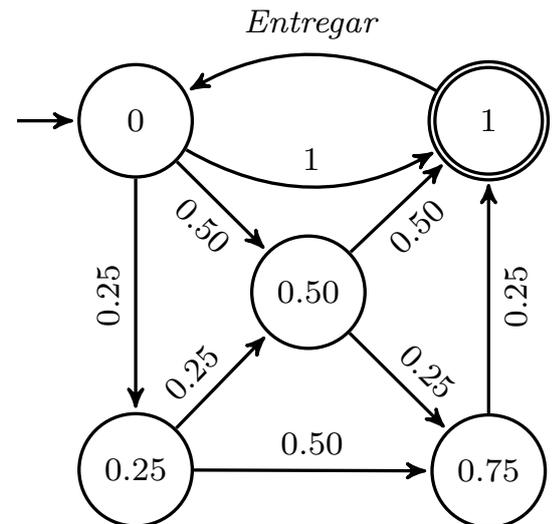
- Puede estar en ON u OFF (sus estados).
- **Apresandolo** pasa de un estado a otro.
- Si está en ON → estaba en OFF y alguien lo apretó.
- Si está en OFF → estaba en ON y alguien lo apretó.

Intuiciones II

- El sistema **empieza** en un determinado estado.
- Existen estados **finales** (o de aceptación).
- El efecto de una acción **depende** del estado actual.

Ejemplo: Exendedor de golosinas.

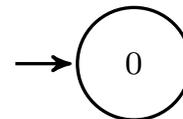
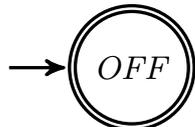
- Estado: Dinero que tiene.
- Inicialmente sin dinero (\$0).
- Entrega golosina **solo si tiene** \$1.
- Acepta: Monedas de 0.25, 0.50 y 1.



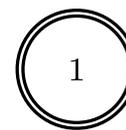
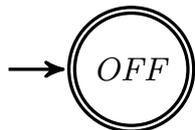
Intuiciones III

¿Qué tienen en común estos ejemplos:?

- Estados iniciales:



- Estados finales:



- Acciones para pasar de un estado a otro.

$\{push\}$ $\{0.25, 0.50, 1, Entregar\}$

- El efecto de una acción depende del estado donde se aplica.

AUTOMATAS FINITOS DETERMINISTICOS.

Definición

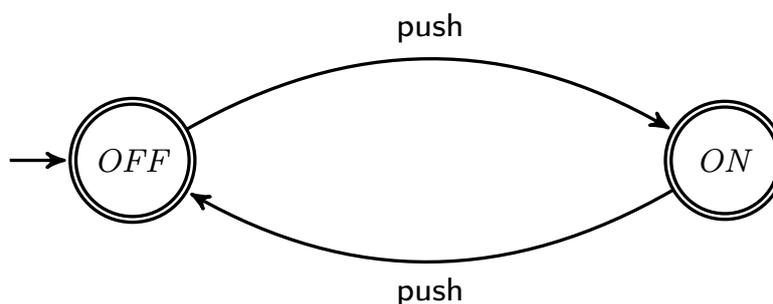
- **Autómata:** Modelo matemático de un sistema con entradas y salidas discretas.
- **Finito:** Tiene un nro. finito de estados.
- **Determinístico:** En todo momento está en un solo estado.

Autómata Finito Determinístico (DFA)

Un DFA es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es un conjunto finito de símbolos.
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$ es la función (total) de transición de estados.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ son los estados finales.

Ejemplo - Interruptor



Definimos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q = \{ON, OFF\}$.
- $\Sigma = \{push\}$.
- $q_0 = OFF$.
- $F = \{ON, OFF\}$.

- δ definida como:

$$\begin{aligned} \delta(ON, push) &= OFF. \\ \delta(OFF, push) &= ON. \end{aligned}$$

Ejemplo - Expendedor de Golosinas

Definimos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q = \{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1\}$.
- $\Sigma = \{0.25, 0.50, 1, E\}$.
- $q_0 = 0$.
- $F = \{1\}$.
- δ definida como:

	0.25	0.50	1	E
$\rightarrow 0$	0.25	0.50	1	—
0.25	0.50	0.75	—	—
0.50	0.75	1	—	—
0.75	1	—	—	—
* 1	—	—	—	0

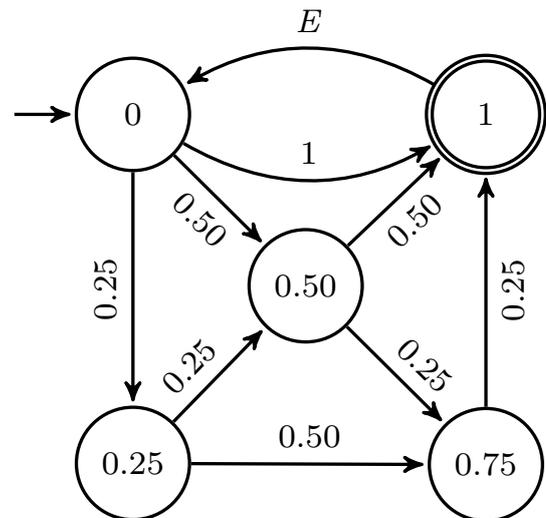


Diagrama de Transición

Algoritmo de Generación de Diagramas de Transición

Dado un autómata $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, su diagrama de transición se construye de la siguiente forma:

- 1 Se agrega un nodo para cada estado $q_i \in Q$.
- 2 Marcamos al nodo del estado inicial q_0 con una flecha que ingresa.
- 3 Marcamos los estados finales $q_i \in F$ con doble círculos.
- 4 Agregamos un eje etiquetado a del nodo q_i al nodo q_j si existe una transición $\delta(q_i, a) = q_j$.

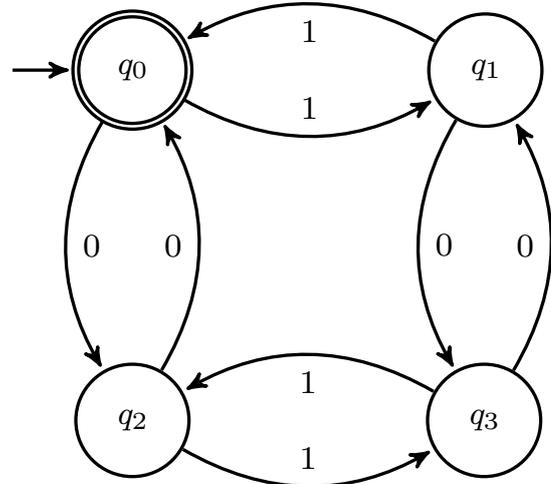
Todo DFA tiene su correspondiente diagrama de transición.

Ejemplo 5 - Creando un Diagrama de Transición

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$.
- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Estado inicial: q_0 .
- $F = \{q_0\}$.
- δ definida como:

	0	1
$\rightarrow * q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2



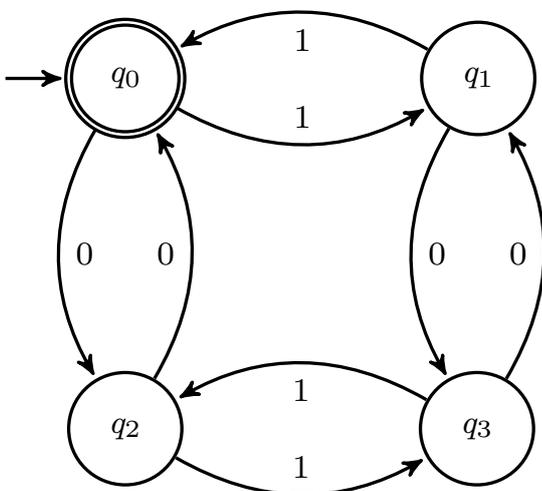
Algunas Definiciones

- **Alfabeto (Σ):** es un conjunto finito de símbolos.
 - Ej: $\Sigma = \{0, 1\}$.
- **Cadena:** secuencia finita de símbolos.
 - Ej: 01, 000111, 1010.
- ϵ : es la cadena vacía (sin símbolos).
- Σ^* : conjunto de todas las palabras sobre Σ .
 - Ej: $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 000111, 1010, \dots\}$.
- **Lenguaje:** Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un conjunto de palabras sobre el alfabeto Σ ($L \subseteq \Sigma^*$).
 - Ej: $L = \{w \mid w \text{ termina en } 1\} \subseteq \Sigma^*$.

Operaciones sobre Cadenas

- **Longitud de una cadena w ($|w|$):** es el nro. de símbolos.
 - $|abab| = 4$, $|\epsilon| = 0$.
- **Subcadena:** es una cadena incluida en una cadena.
 - Si $w = bbabaa$, ab es subcadena de w , aab no.
- **Prefijo de una cadena w :** es una subcadena de w que comienza con el primer símbolo de w .
 - Si $w = bbabaa$, bba es un prefijo de w , ba no.
- **Sufijo de una cadena w :** es una subcadena de w que termina con el último símbolo de w .
 - Si $w = bbabaa$, baa es un sufijo de w , aba no.
- **Concatenación de dos cadenas w y x (wx):** es la unión de las cadenas w y x .
 - Si $w = aaa$ y $x = bbb$, $ab = aaabbb$.
 - $a\epsilon = \epsilon a = a$.

Intuiciones



- Consideremos secuencias de símbolos.
- A que estado nos llevan la secuencias:
 - $\langle 1, 0, 0, 0, 1 \rangle$: $q_0 \rightarrow q_2$.
 - $\langle 0, 1, 0, 1 \rangle$: $q_0 \rightarrow q_0$.
 - $\langle 0, 1 \rangle$: $q_0 \rightarrow q_3$.
- Secuencia como “palabras”.
 - $\langle 1, 0, 0, 0, 1 \rangle \equiv 10001$.
 - $\langle 0, 1, 0, 1 \rangle \equiv 0101$.
 - $\langle 0, 1 \rangle \equiv 01$.
- Un autómata **acepta** palabras.
 - Palabras aceptadas \equiv Lenguaje del autómata.
 - El lenguaje caracteriza al autómata.
 - ¿Cuál es el lenguaje de este autómata?

Definiciones

Transforma en (\rightarrow)

Sea M un DFA, sean p, q estados de M y $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n$ una cadena en M . Diremos que α **transforma** p en q ($p \xrightarrow{\alpha} q$) si partiendo de p y aplicando sucesivamente los inputs a_0, a_1, \dots, a_n llegamos al estado q .

- $p \xrightarrow{\epsilon} p$ (ϵ transforma un estado en si mismo).
- Si $\alpha = a_0, a_1, \dots, a_n$:
 - $p \xrightarrow{\alpha} q \equiv p \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n \xrightarrow{a_n} q$.
- Si $\alpha = \beta\gamma$, donde β y γ son cadenas, entonces:
 - $p \xrightarrow{\alpha} q$ sii existe $r \in Q$ tal que $p \xrightarrow{\beta} r \xrightarrow{\gamma} q$.
- Una cadena α en M es **aceptada** si transforma el estado inicial en uno final.

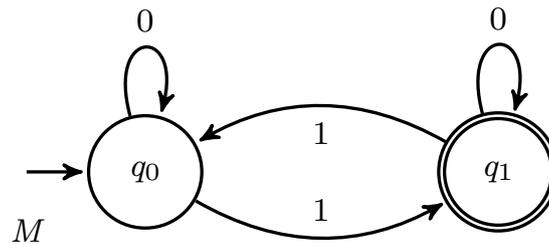
Lenguaje de un Autómata

Lenguaje aceptado por un autómata

Sea M un DFA, el **lenguaje aceptado por M** ($L(M)$) es el conjunto de cadenas aceptadas por el autómata.

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \text{existe } p \in F \text{ tal que } q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

Ejemplo 5



- ¿Cuál es lenguaje de M ?

$$L(M) = \{w \mid w \text{ tiene un nro impar de } 1's\}.$$

- ¿Cómo estamos seguros? Probando el siguiente predicado:

$$q_0 \xrightarrow{w} q_1 \text{ si y solo si } w \text{ tiene un nro. impar de } 1's.$$

- ¿Cómo se prueba? Por inducción en $|w|$.

Equivalencia de Autómatas

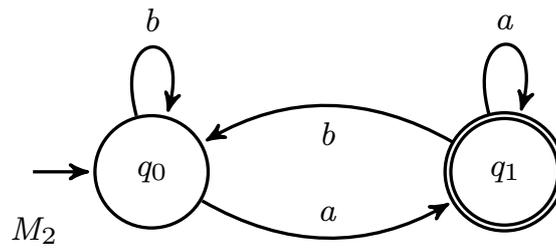
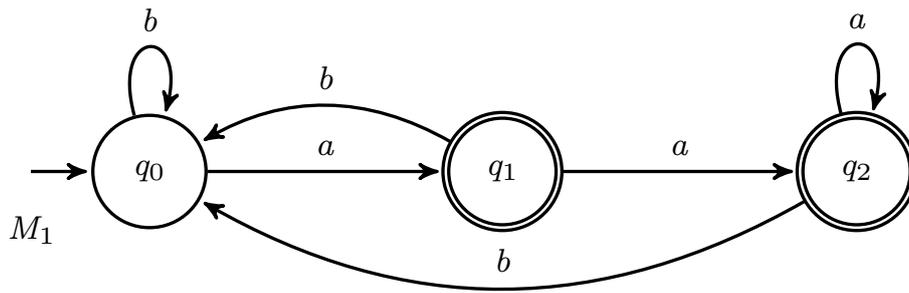
- Un autómata está caracterizado por su lenguaje.
- Podemos comparar los lenguajes de dos autómatas.
- Igualdad de lenguajes \rightarrow noción de equivalencia entre autómatas.

Equivalencia de Autómatas

Sean M y M' dos DFA. Diremos que M y M' son equivalentes si:

$$L(M) = L(M').$$

Ejemplo 6



- ¿ Son equivalentes M_1 y M_2 ?
- ¿Cuál es el lenguaje de M_1 ?
- ¿Cuál es el lenguaje de M_2 ?