Autómatas Finitos No-Deterministicos (NFA)

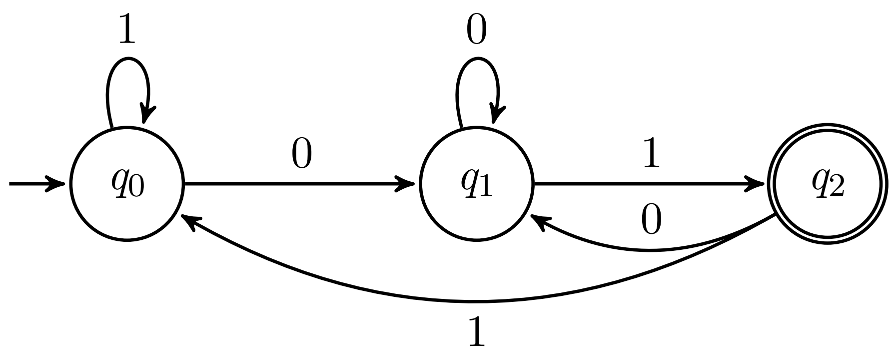
Introducción a la Lógica
Fa.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba

21/10/15

Outline of the Talk

Determinismo vs. No-determinismo

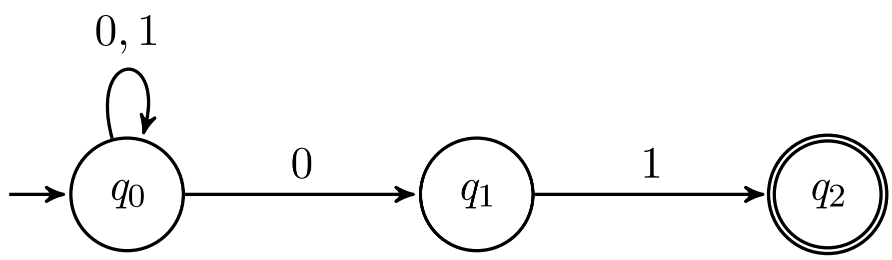
- **Autómata:** Modelo matemático de un sistema con entradas y salidas discretas.
- **Finito:** Tiene un nro. finito de estados.
- **Deterministico**: En todo momento está en un solo estado.



- Un DFA define un lenguaje.

Determinismo vs. No-determinismo

- ¿Qué pasa si permitimos 0, 1 o más transiciones por símbolo?



- ¿En qué estado está el autómata luego de $\delta(q_0, 0)$?
- El autómata esta en un **conjunto de estados** al mismo tiempo.
- Ya no es *deterministico*: es **no deterministico**.

Definición

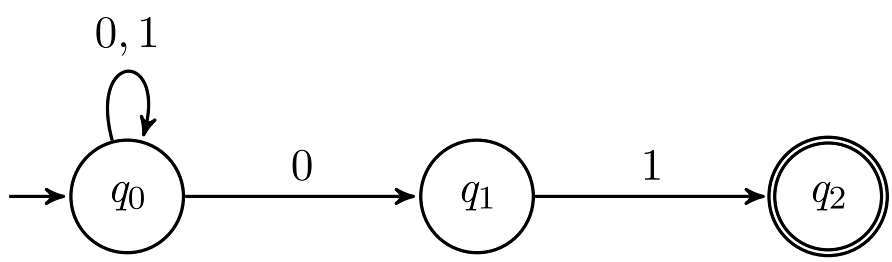
- **Autómata:** Modelo matemático de un sistema con entradas y salidas discretas.
- **Finito:** Tiene un nro. finito de estados.
- **No-Determinístico:** El autómata está en un **conjunto de estados**.

Autómata Finito No-Deterministico (NFA)

Un NFA es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto finito símbolos.
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición de estados.
- $q_0 \in Q$ es el estado final.
- $F \subseteq Q$ son los estados finales.

Ejemplo



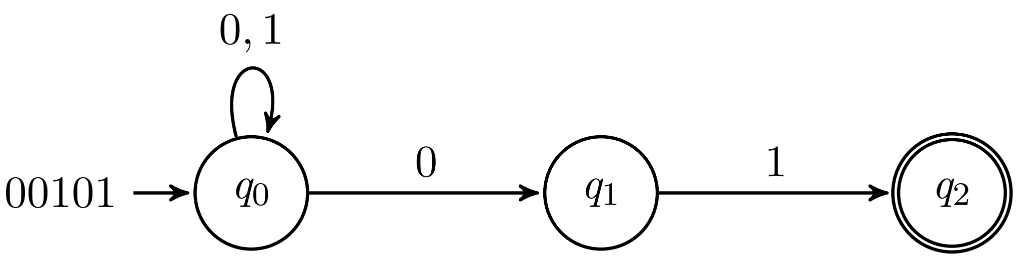
Definimos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

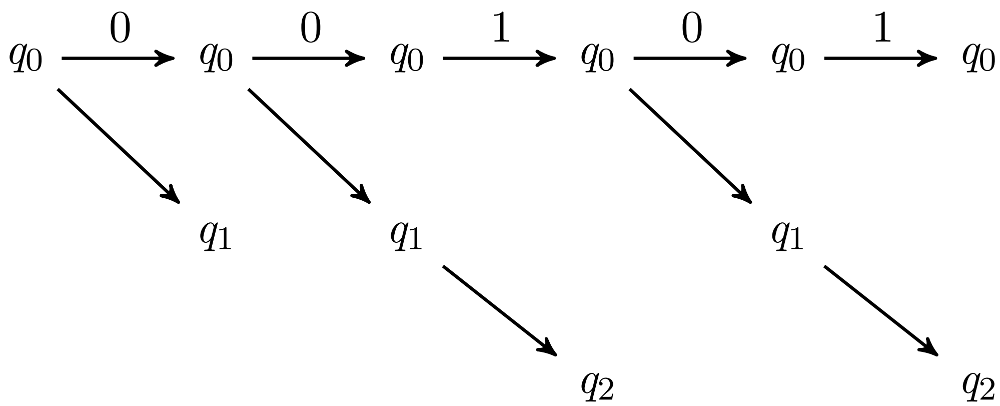
- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$.
- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- $F = \{q_2\}$.
- q_0 es el estado inicial.
- δ esta definida por:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \; q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Procesando el input con no-determinismo

- En un DFA, cada símbolo transforma un estado en otro.
- ¿Cómo funciona una autómata no-deterministico?





Transforma en

- Ahora trabajamos con un conjunto de estados.

Transforma en

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $\alpha = a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma^*$. Diremos que α **transforma** p **en** q ($p \xrightarrow{\alpha} q$) si existen $q_1, \ldots, q_n \in Q$ tal que

$$q_1 \in \delta(p, a_0), q_2 \in \delta(q_1, a_1), \ldots, q_{i+1} \in \delta(q_i, a_i), \ldots,$$
$$q_n \in \delta(q_{n-1}, a_{n-1}), q \in \delta(q_n, a_n).$$

- α puede transformar q_0 en varios estados.
  - α genera distintos recorridos desde q_0.
- α es **aceptada** si algún recorrido llega a un estado final.

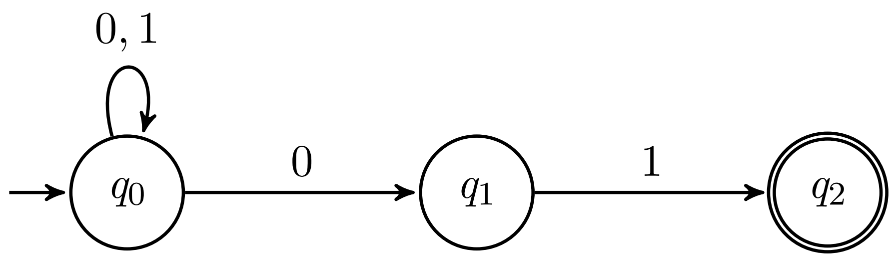
Lenguaje de un NFA

Lenguaje Aceptado por un NFA

Sea M una NFA, el **lenguaje aceptado por M** ($L(M)$) es el conjunto de cadenas aceptadas por el autómata,

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* |\ \text{existe } p \in F \text{ tal que } q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

Ejemplo:

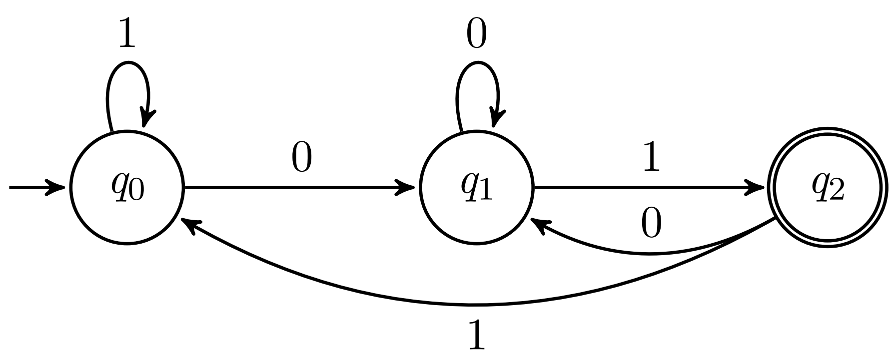


- ¿Cúal es el lenguaje del NFA?
- $L(M) = \{w \mid w \text{ termina en } 01\}$.

Intuiciones

- Los NFA son una generalización de los DFA.
- ¿Los NFA reconocen más lenguajes que los DFA?

Ejemplo:



- ¿Cúal es el lenguaje del DFA?
- $L(M) = \{w \mid w \text{ termina en } 01\}$.
- Los NFA reconocen los mismos lenguajes que los DFA.
- Para todo NFA existe un DFA equivalente.

Construcción por Subconjuntos

- Construyamos un DFA a partir de un NFA.

Construcción por Subconjuntos.

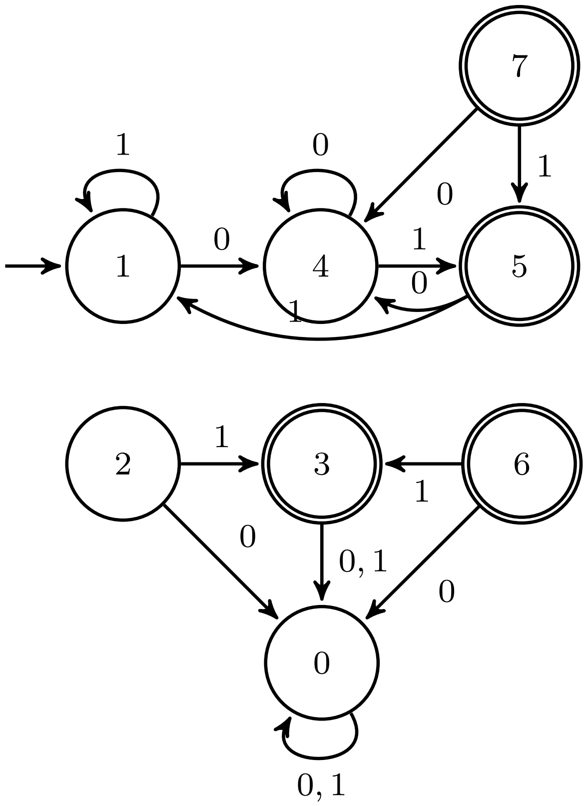
Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Definimos el DFA $D = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ de la siguiente forma:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$.
- $\Sigma' = \Sigma$.
- $F' = \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\}$.
- $q_0' = \{q_0\}$.
- $\delta'(q', a) = \{p \in Q \mid$ existe $q \in q'$ t.q. $q \xrightarrow{a} p\} = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a)$

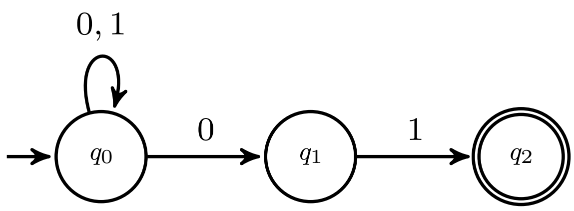
- $\delta'(q', a)$: Estados accesibles a través de a desde cada $q \in q'$.
- Si $|Q| = n$ entonces $|Q'| = 2^n$!!!
  - No preocuparse: no todos son accesibles.

Ejemplo

Sea $D = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$:



			0	1
(0)		$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
(1)	$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
(2)		$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
(3)	$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
(4)		$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
(5)	$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
(6)	$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
(7)	$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$



Construcción Lazy

- No todos los $2^{|Q|}$ estados son necesarios.
- Podemos ser mas eficientes en la construcción de Q'.

Construcción Lazy de Q'

Data: estado inicial q_0, función δ, alfabeto Σ
Result: conjunto de estados Q'

```
Q' ← {{q0}};
Q'' ← ∅;
for q' ∈ (Q' \ Q'') do
    for a ∈ Σ do
        Q' ← Q' ∪ {⋃_{q∈q'} δ(q, a)};
    end
    Q'' ← Q'' ∪ {q'};
end
```


Equivalencia entre DFA y NFA

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Para todo $\alpha \in \Sigma^*$ y todo $q' \in Q'$, si $q' \xrightarrow{\alpha} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\alpha} p\}$

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Luego $L(D) = L(N)$.

Teorema

Los lenguajes aceptados por los DFA son los mismos que los aceptados por los NFA.

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Para todo $\alpha \in \Sigma^*$ y todo $q' \in Q'$, si $q' \stackrel{\alpha}{\to} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \stackrel{\alpha}{\to} p\}$

Por inducción en $|\alpha|$.

<u>Casos Base:</u>

<u>$|\alpha| = 0$:</u> Si $|\alpha| = 0$ entonces $\alpha = \epsilon$ y por def. de $\to$, $q' \stackrel{\epsilon}{\to} q'$.
Q.v.q. $q' = \{p \in Q \mid \exists q \in q' \text{ tq } q \stackrel{\epsilon}{\to} p\}$.
Sea $q' = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, luego, $q_i \stackrel{\epsilon}{\to} q_i, \forall q_i \in q'$, se sigue que $q' = \{p \in Q \mid \exists q \in q' \text{ tq } q \stackrel{\epsilon}{\to} p\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. ya que ϵ transforma todo estado en sí mismo.

<u>$|\alpha| = 1$:</u> Sea $\alpha = a$ con $a \in \Sigma$. Si $q' \stackrel{a}{\to} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \exists q \in q' \text{ tq } q \stackrel{a}{\to} p\}$ por definición de δ'.

<u>Paso Inductivo:</u> Sea $\alpha = \beta a$ con $|\beta| \geq 1$ y $a \in \Sigma$. Q.v.q. si $q' \stackrel{\beta a}{\to} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \stackrel{\beta a}{\to} p\}$.
Si $q' \stackrel{\beta a}{\to} p'$ entonces existe r' tal que, $q' \stackrel{\beta}{\to} r' \stackrel{a}{\to} p'$.
Por HI, tenemos que

$$r' = \{r \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \stackrel{\beta}{\to} r\}.$$

Por el CB donde $|\alpha| = 1$ tenemos que,

$$p' = \{p \in Q \mid \text{ existe } r \in r' \text{ t.q. } r \stackrel{a}{\to} p\}.$$

<u>$\subseteq$:</u> Si $p \in p'$ existe $r \in r'$ tq $r \stackrel{a}{\to} p$ y, como $r \in r'$, existe $q \in q'$ tq $q \stackrel{\beta}{\to} r$, y por lo tanto, $q \stackrel{\beta}{\to} r \stackrel{a}{\to} p \equiv q \stackrel{\beta a}{\to} p$ de donde se sigue que $p' \subseteq \{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \stackrel{\beta a}{\to} p\}$.
<u>$\supseteq$:</u> Si $p \in \{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \stackrel{\beta a}{\to} p\}$, existe $r \in Q$ t.q. $q \stackrel{\beta}{\to} r \stackrel{a}{\to} p$. Luego, por HI y CB, $r \in r'$ y $p \in p'$, lo cual prueba la otra inclusión.

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Luego $L(D) = L(N)$.

Por el lema anterior sabemos que

$$q' \xrightarrow{\alpha} \{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

Si instanciamos $q' = q_0'$, entonces tenemos que:

$$q_0' \xrightarrow{\alpha} \{p \in Q \mid q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}(*).$$

$\underline{\subseteq}$: Supongamos que $\alpha \in L(D)$. Por definición tenemos que $q_0' \xrightarrow{\alpha} p'$ y $p' \in F'$. Como p' es estado final, tenemos que $\exists p \in p'$ tq. $p \in F$. Luego por $(*)$ tenemos que $q_0 \xrightarrow{\alpha} p$ y por lo tanto $\alpha \in L(N)$.
$\underline{\supseteq}$: Supongamos que $\alpha \in L(N)$. Luego $q_0 \xrightarrow{\alpha} p$ con $p \in F$. Por $(*)$ tenemos que $p \in p'$ y que $q_0' \xrightarrow{\alpha} p'$. Como $p \in F$, $p' \in F'$, con lo cual $\alpha \in L(D)$.

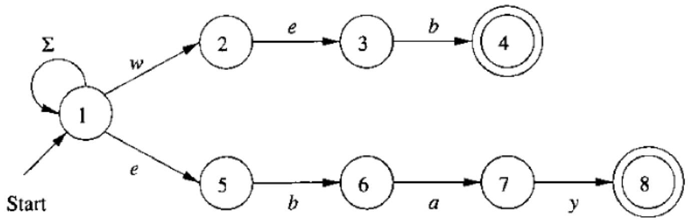
Teorema

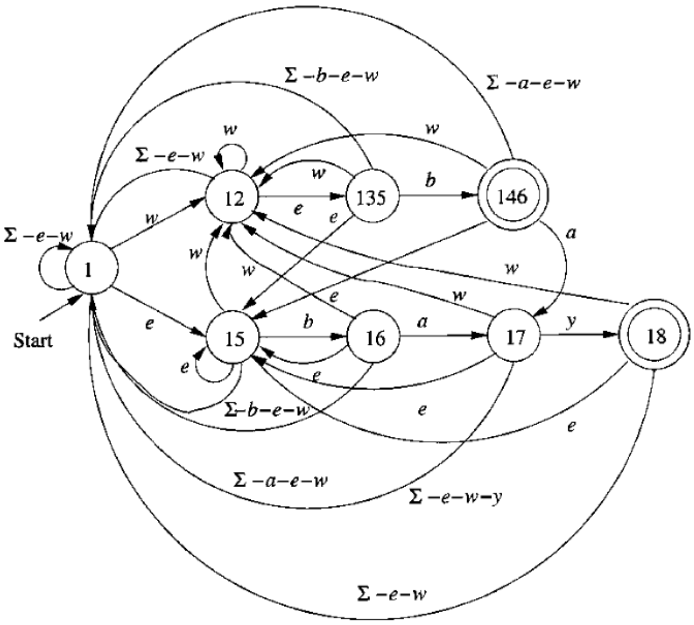
Los lenguajes aceptados por los DFA son los mismos que los aceptados por los NFA.

Q.v.q. para todo DFA D (NFA N) existe un NFA N (DFA D) tal que $L(D) = L(N)$.

- Sea $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, luego, podemos construir un NFA $N = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ donde $\delta'(q, a) = \{\delta(q, a)\}$. Es evidente que $L(D) = L(N)$.
- Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Luego usando la construcción por subconjuntos podemos construir un DFA D y por el Lema 2, sabemos que $L(N) = L(D)$.

Entonces, ¿para qué sirven? (Hopcroft et al)

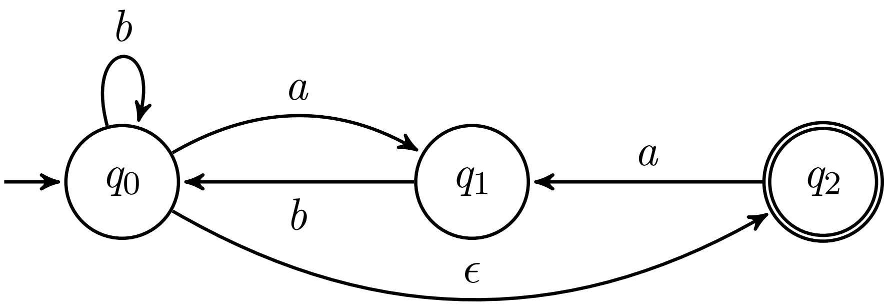




Autómatas Finitos No-Deterministicos Autómatas Finitos No-Deterministicos con ϵ-transiciones

Intuiciones

- Ahora extendamos la definición de un NFA permitiendo:
  - Transiciones mediante el símbolo ϵ (ϵ-transiciones).
  - Transiciones espontáneas.



- Agregan cierto tipo de **conveniencia programatica**.

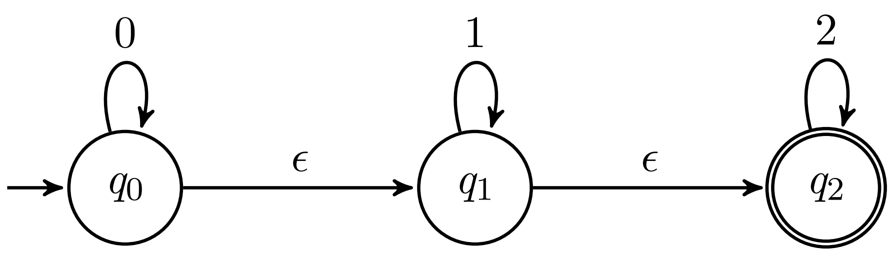
Definición

Autómata Finito No-Deterministico con ϵ-transiciones (NFA-ϵ)

Un NFA-ϵ es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto finito símbolos.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición de estados.
- $q_0 \in Q$ es el estado final.
- $F \subseteq Q$ son los estados finales.

Ejemplo:



Definimos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$.
- $\Sigma = \{0, 1, 2\}$.
- $F = \{q_2\}$.
- q_0 es el estado inicial.
- δ esta definida por:

	0	1	2	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

Transforma en

Transforma en

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA-ϵ y $\alpha \in \Sigma^*$. Diremos que α **transforma** p **en** q ($p \xrightarrow{\alpha} q$) si existen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ y $q_1, \ldots, q_n \in Q$ tal que $\alpha = a_0 a_1 \ldots a_n$ y

$$q_1 \in \delta(p, a_0), q_2 \in \delta(q_1, a_1), \ldots, q_{i+1} \in \delta(q_i, a_i), \ldots, \\ q_n \in \delta(q_{n-1}, a_{n-1}), q \in \delta(q_n, a_n).$$

- Importante:
  - $q \in \delta(p, a)$ implica $p \xrightarrow{a} q$, pero,
  - $p \xrightarrow{a} q$ **no implica** $q \in \delta(p, a)$.
- $p \xrightarrow{a} q$ permite la existencia de ϵ-transiciones.
  - Ej. $p \xrightarrow{a} q \equiv p \xrightarrow{\epsilon a} q \equiv p \xrightarrow{a\epsilon} q$
- α es **aceptada** si algún recorrido llega a un estado final.

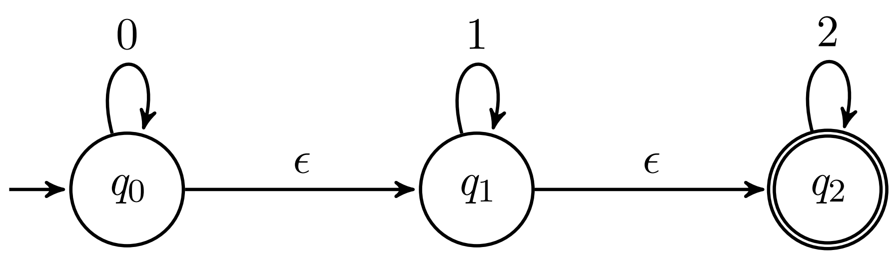
Lenguaje de un NFA-ϵ

Lenguaje Aceptado por un NFA-ϵ

Sea M un NFA-ϵ, el **lenguaje aceptado por M** ($L(M)$) es el conjunto de cadenas aceptadas por el autómata,

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* | \text{ existe } p \in F \text{ tal que } q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

Ejemplo:



- ¿Cúal es el lenguaje del autómata?
- $L = \{w \mid w = 0^i 1^j 2^k \text{ con } 0 \leq i, 0 \leq j, 0 \leq k\}$.

Construcción por Subconjuntos

- Las ϵ-transiciones no expanden la clase de lenguajes.

ϵ-clausura

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA-ϵ y $q \in Q$. Definimos la ϵ-clausura de q ($[q]$) como

$$[q] = \{p \in Q \mid q \xrightarrow{\epsilon} p\}.$$

Para $\{q_1, \ldots, q_k\}$, definimos

$$[q_1, \ldots, q_k] = \bigcup_{i=1}^{k} [q_i].$$

- Notar que $\epsilon = \epsilon\epsilon\epsilon \ldots$
- Recordar que $q \xrightarrow{\epsilon} q$.

Construcción por Subconjuntos para NFA-ϵ

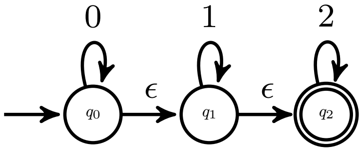
- Construyamos un DFA a partir de un NFA-ϵ.

Construcción por Subconjuntos.

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA-ϵ. Definimos el DFA $D = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ de la siguiente forma:

- $Q' = \{[q_1, \ldots, q_i] \mid q_1, \ldots, q_i \in Q\} \subseteq \mathcal{P}(Q)$.
- $\Sigma' = \Sigma$.
- $F' = \{[q_1, \ldots, q_i] \mid [q_1, \ldots, q_i] \cap F \neq \emptyset\}$.
- $q_0' = [q_0]$.
- $\delta'(q', a) = [\{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{a} p\}]$.

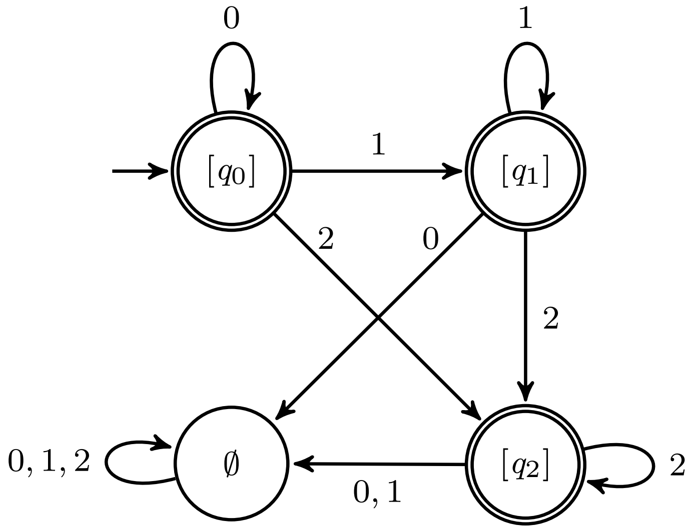
Ejemplo



	0	1	2	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

$$
\begin{aligned}
[\emptyset] &= \emptyset \\
[q_0] &= \{q_0, q_1, q_2\} \\
[q_1] &= \{q_1, q_2\} \\
[q_2] &= \{q_2\} \\
[q_0, q_1] &= [q_0] \\
[q_0, q_2] &= [q_0] \\
[q_1, q_2] &= [q_1] \\
[q_0, q_1, q_2] &= [q_0]
\end{aligned}
$$

		0	1	2
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow *$	$[q_0]$	$[q_0]$	$[q_1]$	$[q_2]$
$*$	$[q_1]$	$\emptyset$	$[q_1]$	$[q_2]$
$*$	$[q_2]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[q_2]$



Equivalencia entre DFA y NFA-ϵ

Lema

Sea $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA-ϵ y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de E usando la construcción por subconjuntos. Para todo $\alpha \in \Sigma^*$ y todo $q' \in Q'$, si $q' \stackrel{\alpha}{\to} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{ existe } q \in q' \text{ t.q. } q \stackrel{\alpha}{\to} p\}$.

Lema

Sea $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA-ϵ y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de E usando la construcción por subconjuntos. Luego $L(D) = L(E)$.

Teorema

Los lenguajes aceptados por los DFA son los mismos que los aceptados por los NFA-ϵ.