Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
12/08/2015, Práctico 1: Relaciones.

Objetivos.
En este práctico estudiaremos algunas propiedades asociadas a una relación y aprenderemos a probar si una relación las satisface. En particular, nos interesan las propiedades que cumplen las relaciones de *equivalencia* y de *orden*.

Como resolver los ejercicios.
Para decidir si la relación R tiene cierta propiedad, lo que debemos hacer es:

1. saber cuál es la definición de la propiedad;
2. comprender qué significa esa propiedad en la relación R;
3. mostrar que R satisface o no la propiedad.

¿Cómo podemos mostrar que una relación R sobre el conjunto A cumple con una propiedad o no? Supongamos que la propiedad que debemos demostrar es la *reflexividad*. En este caso debemos mostrar que para todo elemento $a \in A$, se da que $a \sim_R a$; si A es finito, podemos verificarlo examinando todos los pares de la relación.

Si A es infinito, lo que debemos hacer es tomar un elemento cualquiera $x \in A$ (del que solo suponemos que está en el conjunto) y dar un argumento que muestre que $(x, x) \in R$. Si no se puede construir esa prueba,[1] puede ser que haya un *contraejemplo*, es decir un elemento $z \in A$, tal que suponer $(z, z) \in R$ nos conduzca a una situación contradictoria. Si encontramos un contra-ejemplo, entonces la relación R **no** satisface la reflexividad.

Ejercicios.

1. ¿Qué propiedades debe cumplir una relación para ser de equivalencia?
2. Determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.
   a) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,3),(3,1)\}$
   b) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,3),(3,1)\ (3,4),\ (4,3)\}$
   c) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\}$
   d) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,5),\ (5,1),\ (3,5),\ (5,3),\ (1,3),\ (3,1)\}$
   e) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (1,5),\ (5,1),\ (3,5),\ (5,3),\ (1,3),\ (3,1)\}$
   f) $\{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 5\}$
3. Determine si las siguientes relaciones sobre $\mathbb{N}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas:
   a) $(x, y) \in R$ sii $x^2 = y^2$
   b) $(x, y) \in R$ sii $x > y$
   c) $(x, y) \in R$ sii $x \geq y$
   d) $(x, y) \in R$ sii $x \neq y$
4. Utilizando las respuestas del ejercicio (3) determine para cada caso si la relación es de equivalencia y/o de orden. Recuerde que una relación de *orden* debe ser reflexiva, antisimétrica, y transitiva.
5. Liste los pares de la relación de equivalencia sobre $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ definida por la partición dada. También señale las clases de equivalencia [1], [2], [3] y [4].
   a) $\{1,2\},\{3,4\}$
   b) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$
   c) $\{1,2,3,4\}$
   d) $\{1\},\{2,4\},\{3\}$
6. Considere la relación dada sobre personas por la siguiente condición: $x \preceq y$ si y sólo si "x es más joven o tiene la misma edad que y".
   a) ¿Qué condición debe tener un conjunto A de personas para que $\preceq$ sea una relación de orden sobre A?
   b) Defina una relación de equivalencia $\sim$ sobre las personas de manera tal que la relación $\preceq$ (ahora sobre las clases de equivalencia) sea un orden parcial.

[1] Esto no es lo mismo que no encontrarla rápidamente!