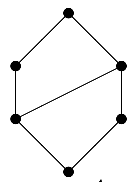
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
19/08/2015, Práctico 3: Isomorfismos de posets. Posets reticulados.

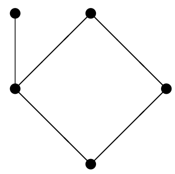
Objetivo. Poder identificar posets isomorfos y también distinguir posets no isomorfos. Reconocer posets reticulados verificando que todo par de elementos tiene supremo e ínfimo; corroborar la validez de ciertas leyes y la satisfacción de ciertos enunciados sobre posets reticulados.

1. Discuta en grupo qué constituye un isomorfismo de posets; luego compruebe los siguientes isomorfismos. *a*) $(D_6, |) \cong (\mathcal{P}(\{a,b\}), \subseteq)$. *b*) $(D_{30}, |) \cong (\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$.
2. Sea $(P, \leq)$ un poset con dos elementos maximales distintos y $(Q, \preceq)$ otro poset con un único elemento maximal. ¿Puede existir un isomorfismo entre ellos?
3. Determine si es posible encontrar dentro del poset $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ un subconjunto que visto como poset sea isomorfo a $(D_{18}, |)$.
4. La siguiente tabla fue llenada parcialmente con los supremos de pares de elementos en un poset $(S, \preceq)$; por ejemplo $\sup\{b,c\} = d$.
   - *a*) Llene el resto de la tabla.
   - *b*) ¿Cuál es el mínimo y el máximo de S?
   - *c*) Muestre que $f \preceq c \preceq d \preceq e$.
   - *d*) Dibuje el diagrama de Hasse asociado a $(S, \preceq)$.

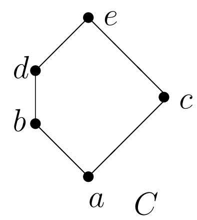
sup	a	b	c	d	e	f
a		e	a	e	e	a
b			d	d	e	b
c				d	e	c
d					e	d
e						e
f						

5. Supongamos que un poset tiene la siguiente propiedad: para todo $a, b \in P$, $\sup\{a,b\}$ existe. ¿Podemos concluir que $\sup(S)$ existe para cualquier $S \subseteq P$ finito y no vacío?
6.
   - *a*) Relacione los siguientes diagramas de Hasse con los posets $(\{1,2,3,4,6,12\}, |)$ y $(\{1,2,3,4,6\}, |)$.
   - *b*) Determine cuándo están definidas las operaciones $\wedge, \vee$ en esos posets.
   - *c*) ¿Cuáles de esos posets son reticulados?
   - *d*) Calcular $4 \wedge (2 \vee 3)$ en ambos posets.
   - *e*) Determinar un subconjunto de $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ cuyo diagrama de Hasse sea B.

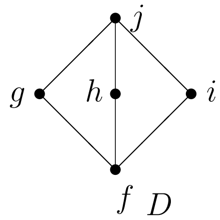

A


B

7. Para cada una de las siguientes proposiciones, dé diagramas de Hasse representando posets reticulados que la satisfagan, y que no la satisfagan, en el caso de existir. Recuerde que una proposición se satisface en un poset reticulado si la ecuación vale para todo posible valor de las variables en dicho poset.
   a) $(x \wedge y = y)$ ó $(x \wedge y = x)$. *b*) $x \wedge y = y$.
8. En cada uno de los siguientes diagramas encuentre x, y y z tales que
   - *a*) $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
   - *b*) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) < x \wedge (y \vee z)$



C



D

9. Demuestre que en todo poset reticulado se cumple $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
10. Determine cuántos isomorfismos hay de $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ en sí mismo.