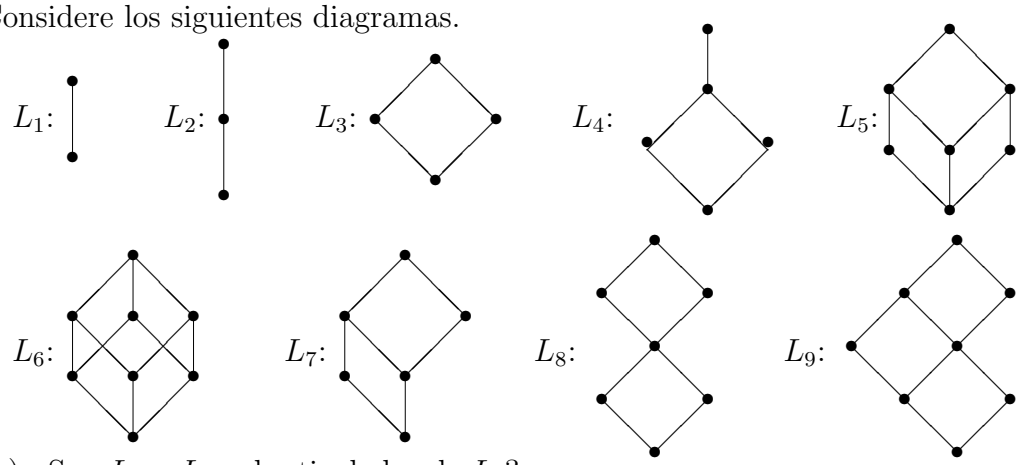
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
28/08/2014, Práctico 6: Álgebras de Boole.

Objetivos. Entender el concepto de subreticulado. Identificar cuando un reticulado es un álgebra de Boole. Estudiar propiedades de las álgebras de Boole. Comprender la construcción de productos de posets y verificar qué propiedades preserva esa construcción.

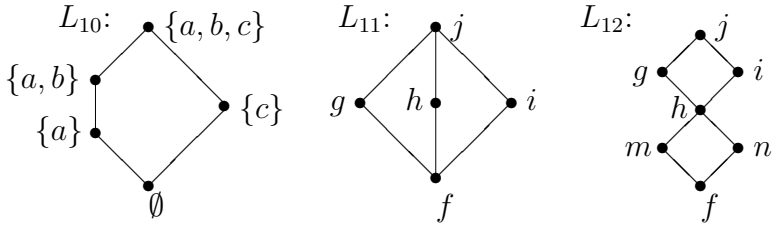
Definición Con **n** nos referimos a la cadena (orden total) con n elementos. Por ejemplo, los dos primeros reticulados de más abajo los podemos escribir como $L_1 = \mathbf{2}$ y $L_2 = \mathbf{3}$.

1. Considere los siguientes diagramas.



   a) ¿Son L_7 y L_8 subreticulados de L_9?
   b) ¿Cuáles de estos reticulados tienen a L_4 como subreticulado? ¿Y a L_5?

2. ¿Es L_{10} subreticulado de $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$? ¿Es L_{11} subreticulado de L_{12}? ¿De cuántas maneras distintas es L_3 subreticulado de L_{12}?



3. ¿Cuáles de los 12 reticulados anteriores son álgebras de Boole?
4. Sea B un álgebra de Boole y $\leq$ el orden asociado a B. Demuestre que
   a) $(x^c)^c = x$;
   b) $x \leq y$ si y sólo si $y^c \leq x^c$;
   c) $y \wedge z = 0$ si y sólo si $y \leq z^c$; (¿cómo sería una propiedad similar con $y \vee z$?)
   d) si $x \leq y$ e $y \wedge z = 0$ entonces $z \leq x^c$.
5. Sean $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ posets. Considere el conjunto $L \times M$ con $\preceq$ definida así:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \text{ sii } x_1 \leq_L x_2 \text{ y } y_1 \leq_M y_2.$$

   a) Dé los diagramas de Hasse de :
      1) $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$ 2) $\mathcal{P}(\{a,b\}) \times \mathbf{2}$. 3) $\mathbf{2}^3$.
   b) Pruebe que si L y M son reticulados entonces $L \times M$ también lo es. Dé explícitamente las operaciones

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) \qquad (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)$$

   c) Pruebe que si L y M son distributivos, entonces $L \times M$ también lo es.
   d) Defina el producto $B_0 \times B_1$ de las álgebras de Boole B_0 y B_1 y pruebe que es un álgebra de Boole.