Parte II: Lógica Proposicional

2 de octubre de 2015

Deducción natural

- La clase pasada introdujimos las reglas de inferencia que nos aseguran que si partimos de premisas válidas, entonces las conclusiones serán válidas.
- Luego mostramos ejemplos de cómo usarlas para construir derivaciones.
- Si bien no lo explicitamos, mencionamos que las pruebas podían ser vistas cómo árboles.
- A las hojas (que no estaban entre corchetes) les llamábamos hipótesis; y a la raiz, conclusión.

Más conectivos

- Puesto que el conjunto $\{\wedge, \to, \bot\}$ era funcionalmente completo podíamos contentarnos con esos conectivos.
- En esta clase daremos reglas de inferencia para: la doble implicación ($\leftrightarrow$), la disyunción ($\vee$) y la negación ($\neg$).
- ¿Qué tenemos que hacer?
  - Reglas de inferencia
  - Agregar cláusulas en la definición del conjunto $\mathcal{D}$.
  - Extender las funciones $concl$ e hip para los nuevos casos considerados.

La doble implicación, introducción

- Si pensamos que la doble implicación $P \leftrightarrow Q$ se codifica como $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$, entonces no es sorprendente que la regla de introducción sea una combinación de las introducciones de $\to$ y de $\wedge$:

$$\frac{\begin{array}{cc} [P] & [Q] \\ \vdots & \vdots \\ Q & P \end{array}}{P \leftrightarrow Q} \leftrightarrow I$$

- Recordemos que las hipótesis que podemos descargar son P en el sub-árbol de la izquierda y Q en el sub-árbol de la derecha.
- NO podemos descargar P en el sub-árbol de la derecha.
- NO podemos descargar Q en el sub-árbol de la izquierda.

La doble implicación, eliminación

- ¿Cuántas reglas habrá para eliminar la doble implicación?
- Puesto que lo codificamos como una conjunción, tendremos dos reglas de eliminación:

$$\frac{P \qquad P \leftrightarrow Q}{Q} \leftrightarrow E \qquad\qquad \frac{Q \qquad P \leftrightarrow Q}{P} \leftrightarrow E$$

La disyunción, introducción

- La disyunción es el dual de la conjunción: mientras que para introducir una conjunción necesitamos pruebas de ambos términos, para la disyunción nos alcanza con uno.
- Por ello tenemos dos reglas de introducción:

$$\frac{P}{P \vee Q} \vee I \qquad\qquad \frac{Q}{P \vee Q} \vee I$$

- ¿Cuántas reglas de eliminación de la disyunción habrá?

La disyunción, eliminación

- Teniendo en cuenta la dualidad entre $\wedge$ y $\vee$ es esperable tener una única regla de eliminación de la disyunción.
- Pero, cómo podemos usar una disyunción $P \vee Q$?
- Si suponiendo P podemos concluir R y si suponiendo Q también podemos concluir R, entonces podemos concluir R a partir de cualquiera de las dos:

$$\dfrac{P \vee Q \qquad \begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ R\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Q]\\ \vdots \\ R\end{array}}{R}\ \vee E$$

La disyunción, eliminación

- La regla de eliminación de la disyunción muestra cómo probar por casos R:
- por un lado podemos suponer P para probar R y por lo tanto en el segundo sub-árbol podemos descargar P;
- por otro lado podemos suponer Q para probar R, consecuentemente descargamos Q del tercer sub-árbol.
- PERO no podemos descargar NI P NI Q en el primer sub-árbol, no al menos al usar esta regla!

La negación

- Las reglas de la negación son muy fáciles de comprender si pensamos en cómo la habíamos definido en términos de $\to$ y $\perp$:
- Introducción:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg P}\,\neg I$$

- Eliminación:

$$\dfrac{P \qquad \neg P}{\perp}\,\neg E$$

Ejemplos de derivaciones con los nuevos conectivos

- $\{P \vee Q, \neg P\} \vdash Q$
- $\vdash (((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P) \leftrightarrow (P \vee \neg P)$

El conjunto de derivaciones

Al conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$ le agregamos algunas cláusulas:

$(\leftrightarrow I)$ Si $\begin{array}{c}[P]\\ D_1 \ \vdots\\ Q\end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c}[Q]\\ D_2 \ \vdots\\ P\end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ D_1 \ \vdots\\ Q\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Q]\\ D_2 \ \vdots\\ P\end{array}}{P \leftrightarrow Q} \leftrightarrow I \quad \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

Al conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$ le agregamos algunas cláusulas:

$(\leftrightarrow E)$ Si $\begin{array}{c} D_1 \\ \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} D_2 \\ \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ P \leftrightarrow Q \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \; \vdots \\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \; \vdots \\ P \leftrightarrow Q \end{array}}{Q} \leftrightarrow E \in \mathcal{D}$$

$(\leftrightarrow E)$ Si $\begin{array}{c} D_1 \\ \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ Q \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} D_2 \\ \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ P \leftrightarrow Q \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \; \vdots \\ Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \; \vdots \\ P \leftrightarrow Q \end{array}}{P} \leftrightarrow E \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

Al conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$ le agregamos algunas cláusulas:

$$(\neg I)\ \text{Si}\quad D\ \begin{array}{c} P \\ \vdots \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}, \text{ entonces }\quad D\ \dfrac{\begin{array}{c} [P] \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg P}\,\neg I \in \mathcal{D}$$

$$(\neg E)\ \text{Si}\quad D_1\ \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \in \mathcal{D} \text{ y }\quad D_2\ \begin{array}{c} \vdots \\ \neg P \end{array} \in \mathcal{D}, \text{ entonces}$$

$$\dfrac{D_1\ \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \qquad D_2\ \begin{array}{c} \vdots \\ \neg P \end{array}}{\bot}\,\neg E \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

Al conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$ le agregamos algunas cláusulas:

$(\vee E)$ Si

$$D_1 \begin{array}{c} \vdots \\ P \vee Q \end{array} \in \mathcal{D}\,, \quad D_2 \begin{array}{c} [P] \\ \vdots \\ R \end{array} \in \mathcal{D} \text{ y } \quad D_3 \begin{array}{c} [Q] \\ \vdots \\ R \end{array} \in \mathcal{D}, \text{ entonces}$$

$$\dfrac{D_1 \begin{array}{c} \vdots \\ P \vee Q \end{array} \quad D_2 \begin{array}{c} [P] \\ \vdots \\ R \end{array} \quad D_3 \begin{array}{c} [Q] \\ \vdots \\ R \end{array}}{R}\,\vee E \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

Al conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$ le agregamos algunas cláusulas:

$(\vee I)$ Si $D \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $D \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{P}{P \vee Q} \vee I \end{array} \in \mathcal{D}$

$(\vee I)$ Si $D \begin{array}{c} \vdots \\ Q \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $D \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{Q}{P \vee Q} \vee I \end{array} \in \mathcal{D}$

Ejemplo de función (no tan) recursiva

- La clase pasada habíamos definido $concl\colon \mathcal{D} \to Prop$ e $hip\colon \mathcal{D} \to \mathcal{P}(Prop)$; la definición para $concl$ de las nuevas cláusulas son fáciles y quedan de ejercicio. Veamos las de hip:

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} \\ D_1 \end{array} \begin{array}{c} [P] \\ \vdots \\ Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ D_2 \end{array} \begin{array}{c} [Q] \\ \vdots \\ P \end{array}}{P \leftrightarrow Q} \leftrightarrow I\right) = \begin{array}{l} (hip(D_1) \setminus \{P\}) \\ \cup\, (hip(D_2) \setminus \{Q\}) \end{array} \qquad (\leftrightarrow I)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \vdots \\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \vdots \\ P \leftrightarrow Q \end{array}}{Q} \leftrightarrow E\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \quad (\leftrightarrow E)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \vdots \\ Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \vdots \\ P \leftrightarrow Q \end{array}}{P} \leftrightarrow E\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \quad (\leftrightarrow E)$$

Ejemplo de función recursiva

$$hip\left(\begin{array}{c} \\ D \end{array}\;\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg P}\to I\right) = hip(D) \setminus P \qquad (\neg I)$$

$$hip\left(\begin{array}{c} D_1 \\ \\ \end{array}\;\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ P\end{array} \qquad D_2 \quad \begin{array}{c}\vdots \\ \neg P\end{array}}{\bot}\to E\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\to E)$$

$$hip\left(\begin{array}{c} D \\ \\ \end{array}\;\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ P\end{array}}{P \vee Q}\vee I\right) = hip(D) \qquad (\vee I)$$

$$hip\left(D_1\;\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ P \vee Q\end{array} \qquad D_2 \; \begin{array}{c}[P] \\ \vdots \\ R\end{array} \qquad D_3 \; \begin{array}{c}[Q] \\ \vdots \\ R\end{array}}{R}\vee E\right) = \begin{array}{l} hip(D_1) \\ \cup (hip(D_2) \setminus \{P\}) \\ \cup\, (hip(D_3) \setminus \{Q\}) \end{array} \qquad (\vee E)$$

Pispeando el futuro

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash Q$, *entonces* $\Gamma \models Q$.

- Recordemos que $\Gamma \vdash Q$ significa que existe una derivación D tal que $hip\,(D) \subseteq \Gamma$ y $concl\,(D) = Q$.
- El enunciado preciso que probaremos es:
  Para toda derivación D, si $hip\,(D) \subseteq \Gamma$ y $concl\,(D) = Q$, entonces $\Gamma \models Q$.
- Para la prueba utilizaremos una inducción en derivaciones.

Pispeando el futuro: completitud

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \models Q$*, entonces* $\Gamma \vdash Q$*.*

- Como $\Gamma \models Q$, entonces para toda f de Γ, $[\![Q]\!]_f = 1$;
- por lo tanto no existe f de $\Gamma \cup \{\neg Q\}$.
- Si no existe f de Δ, entonces $\Delta \vdash \bot$.
- Con el punto anterior y RAA podemos concluir $\Gamma \vdash Q$.