Parte II: Lógica Proposicional

9 de octubre de 2015

Semántica

- Las asignaciones son funciones en $\mathcal{V} \to \{0, 1\}$.
- Dada una asignación f, definimos la semántica $[\![-]\!]_f \colon Prop \to \{0, 1\}$.
- Una proposición P es tautología si para toda asignación f, $[\![P]\!]_f = 1$.
- Una asignación f es de $\Gamma \subseteq Prop$, si para toda $Q \in \Gamma$, $[\![Q]\!]_f = 1$.
- Decimos que P es consecuencia lógica de Γ, $\Gamma \models P$, si para toda f de Γ, se da que $[\![P]\!]_f = 1$.

Deducción natural

- Necesidad de formalizar los esquemas de razonamiento válido.
- Reglas de inferencia para construir derivaciones a partir de hipótesis.
- Definición por inducción del conjunto $\mathcal{D}$ de derivaciones.
- Decimos que Q se deduce de Γ, $\Gamma \vdash Q$, si existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = Q$.
- Las reglas sólo nos permiten inferir conclusiones válidas a partir de premisas válidas: $\Gamma \vdash Q$ implica $\Gamma \models Q$.

El plan de la clase de hoy

- Queremos probar $\Gamma \models P$ implica $\Gamma \vdash P$.
- Si $\Gamma \models P$, entonces no existe ninguna asignación de $\Gamma \cup \{\neg P\}$.
- Si no existe f de $\Gamma \cup \{\neg P\}$, entonces $\Gamma \cup \{\neg P\} \vdash \perp$. ¡Esto es lo difícil!
- Por lo tanto, $\Gamma \vdash P$ por RAA.

InConsistencia

- Un conjunto $\Gamma \subseteq Prop$ es **in***consistente* si $\Gamma \vdash \bot$.
- ¿Ejemplos de inconsistentes?
- Un conjunto $\Gamma \subseteq Prop$ es *consistente* si $\Gamma \nvdash \bot$.
- La definición de inconsistente es equivalente a estas otras.
  Sea $\Gamma \subseteq Prop$, Γ es inconsistente si y sólo si
  Existe $P \in Prop$ tal que $\Gamma \vdash P$ y $\Gamma \vdash \neg P$.
  Para toda $P \in Prop$, $\Gamma \vdash P$.

Consecuencias de inconsistencia

- Si $\Gamma \cup \{\neg P\} \vdash \bot$, entonces $\Gamma \vdash P$.
  Sea D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\neg P\}$ y $concl(D) = \bot$, entonces construimos la siguiente derivación:

$$
\begin{array}{cc}
 & [\neg P] \\
 & \vdots \\
D & \bot \\
 & \vdots \\
 & P
\end{array}
$$

hacer el práctico

- Si $\Gamma \cup \{P\} \vdash \bot$, entonces $\Gamma \vdash \neg P$.

Criterios de consistencia

- ¿Cómo podemos saber si un conjunto Γ es consistente?
- Es decir tenemos que ver $\Gamma \nvdash \bot$.
- Para probar que $\emptyset$ es consistente (es decir $\nvdash \bot$), usamos la contra-recíproca de corrección.
- Si existe una asignación f de Γ, entonces Γ es consistente.

  Sea f una asignación de Γ y supongamos $\Gamma \vdash \bot$ (para llegar a una contradicción). Entonces $[\![\bot]\!]_f = 1$: la contradicción que buscábamos. Por lo tanto $\Gamma \nvdash \bot$.
- $\{p_0, \neg p_1, p_2, \neg p_3, \ldots, p_{2*k}, \neg p_{2*k+1}, \ldots\}$ es consistente.
- Para ver que un conjunto Γ es inconsistente, debemos mostrar $\Gamma \vdash \bot$!

Consistentes maximales

- ¿Será cierta la vuelta del criterio de consistencia?
- Sea Γ es consistente, ¿existe una asignación de Γ?
- ¿Por qué es importante esta pregunta?
- Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg P\}$ no tiene una asignación.
  Entonces $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es inconsistente: $\Gamma \cup \{\neg P\} \vdash \perp$
  Por lo tanto, $\Gamma \vdash P$.
- Un conjunto $\Gamma \subseteq Prop$ es *consistente maximal* si
  para todo Δ consistente, $\Gamma \subseteq \Delta$ implica $\Delta = \Gamma$.
- Prácticamente, Δ es consistente maximal si no existe $Q \notin \Delta$, tal que $\Delta \cup \{Q\}$ siga siendo consistente.

Consistentes maximales

- Los consistentes maximales son cerrados por derivación: si Δ es consistente maximal, entonces $\Delta \vdash P$ implica $P \in \Delta$.

  Supongamos $P \notin \Delta$, entonces $\Delta \cup \{P\} \vdash \perp$, de otro modo Δ no sería maximal.
  Por el ejercicio, sabemos $\Delta \vdash \neg P$; entonces $\Delta \vdash \perp$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ P\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \neg P\end{matrix}}{\perp} \to E$$

Consistentes maximales

- Sea Δ un conjunto maximal, entonces Δ *realiza* los conectivos.
  1. Para toda $P \in Prop$, $P \notin \Delta$ si y sólo si $\neg P \in \Delta$.
     Si $P \notin \Delta$, entonces $\Delta \vdash \neg P$, por lema anterior.
  2. $P \in \Delta$ y $Q \in \Delta$ si y sólo si $P \wedge Q \in \Delta$.
  3. Si $P \in \Delta$ implica $Q \in \Delta$, entonces $P \to Q \in \Delta$.
     Supongamos $P \notin \Delta$, entonces $\neg P \in \Delta$.
     $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \qquad [P]_1}{\bot} \to E}{Q} \bot E}{P \to Q} \to I_1$$
     Supongamos $P \in \Delta$, entonces $Q \in \Delta$, por lo tanto $\dfrac{Q}{P \to Q} \to I$
  4. Si $P \to Q \in \Delta$, entonces $P \in \Delta$ implica $Q \in \Delta$.
     Es muy simple $\dfrac{P \to Q \qquad P}{Q} \to E$
- En los tres casos concluimos que la proposición está en Δ, porque Δ es cerrado por derivaciones.

Consistentes maximales

- Supongamos que Δ es consistente maximal.
- Si sabemos que ciertas proposiciones están en Δ, entonces podemos saber que otras también están.
- Ejemplo: Si $P \in \Delta$, entonces $Q \to P \in \Delta$, para todo Q.
- Si Γ es consistente, entonces pueden existir varios Δ_i y consistentes maximales tales que $\Gamma \subseteq \Delta_i$.
- Ejemplo: $\emptyset$ es consistente (¿por qué?) y hay muuchos maximales que lo contienen.

Existencia de valuación

- Sea Δ consistente maximal, entonces para toda $P \in Prop$
  o bien $P \in \Delta$ o bien $\neg P \in \Delta$.
- Si Δ es consistente maximal, entonces existe una asignación de Δ.
  Definamos $f\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
f\, p_i = 1 & \text{si } p_i \in \Delta \\
f\, p_i = 0 & \text{si } p_i \notin \Delta
\end{array}
$$

  Probamos $[\![Q]\!]_f = 1$ si y sólo si $Q \in \Delta$, usando inducción en Q.

  (At) Por definición de f y de $[\![-]\!]_f$.

Existencia de valuación

$(P \to Q)$ Asumimos $[\![P]\!]_f = 1$ sii $P \in \Delta$ y $[\![Q]\!]_f = 1$ sii $Q \in \Delta$.
Si $[\![P \to Q]\!]_f = 1$, entonces o bien $[\![Q]\!]_f = 1$, entonces $Q \in \Delta$ y $P \to Q \in \Delta$;
o bien $[\![P]\!]_f = 0$, entonces $P \notin \Delta$; por lo tanto $\neg P \in \Delta$ y concluimos $P \to Q \in \Delta$.
Si $P \to Q \in \Delta$, entonces $P \in \Delta$ implica $Q \in \Delta$.
Si $P \in \Delta$, entonces $Q \in \Delta$ y por h.i. $[\![P \to Q]\!]_f = 1$.
Si $P \notin \Delta$, entonces por h.i. $[\![P]\!]_f = 0$ y por lo tanto $[\![P \to Q]\!]_f = 1$.

Existencia de valuación

$(P \wedge Q)$ Asumimos $[\![P]\!]_f = 1$ sii $P \in \Delta$ y $[\![Q]\!]_f = 1$ sii $Q \in \Delta$.
Si $[\![P \wedge Q]\!]_f = 1$, entonces tanto $[\![P]\!]_f = 1$ como $[\![Q]\!]_f = 1$, por h.i. en P y en Q, tenemos $P \in \Delta$ y $Q \in \Delta$, por lo tanto $P \wedge Q \in \Delta$.
Si $P \wedge Q \in \Delta$, entonces $P \in \Delta$ y $Q \in \Delta$. Por h.i. en P y en Q, $[\![P]\!]_f = [\![Q]\!]_f = 1$. Por lo tanto, $[\![P \wedge Q]\!]_f = 1$.

Extension a maximales

- Para ver que todo conjunto consistente Γ tiene una asignación, lo extendemos a uno maximal Γ^*.
  Como las proposiciones son numerables, podemos pensarlas dadas por una lista infinita: $P_0, P_1, P_2, \ldots$.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma & & \\ \Gamma_{n+1} &= \Gamma_n & & \text{si } \Gamma_n \cup \{P_n\} \vdash \bot \\ \Gamma_{n+1} &= \Gamma_n \cup \{P_n\} & & \text{si } \Gamma_n \cup \{P_n\} \nvdash \bot \end{aligned}$$

$$\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

- Podemos probar que Γ^* es consistente maximal.

Γ^* es consistente maximal

- Γ_0 es consistente por hipótesis.
- Si Γ_n es consistente, entonces Γ_{n+1} es consistente.
- Si Γ^* es inconsistente, entonces existe k tal que Γ_k es inconsistente. Supongamos $\Gamma^* \vdash \perp$; la derivación D que muestra eso tiene necesariamente finitas hipótesis no canceladas.
  Si $hip(D) \subseteq \Gamma^*$, entonces $hip(D) \subseteq \Gamma_k$, para algún k. Pero esto es absurdo, pues mostramos que Γ_k es consistente.
- Para ver que es maximal, supongamos que $\Gamma^* \cup \{Q\}$ es consistente. Como Q aparecía en nuestra lista, digamos en la posición m, entonces $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{Q\}$ es consistente; por lo tanto $Q \in \Gamma^*$.

Recapitulando

- Si f es de Δ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces f es de Γ.
- Como corolario de que todo maximal tiene una asignación, y de
- que todo consistente se extiende a uno maximal,
- obtenemos que todo conjunto consistente tiene una asignación.
- La contrarecíproca de lo anterior nos dice, si no existe asignación de Γ, entonces Γ es inconsistente.

Teorema de completitud

Teorema

Si $\Gamma \models P$, *entonces* $\Gamma \vdash P$.

Supongamos $\Gamma \models P$. Entonces no existe f de $\Gamma \cup \{\neg P\}$.
Entonces, por criterio de consistencia, $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es inconsistente.
Por lo tanto $\Gamma \vdash P$.