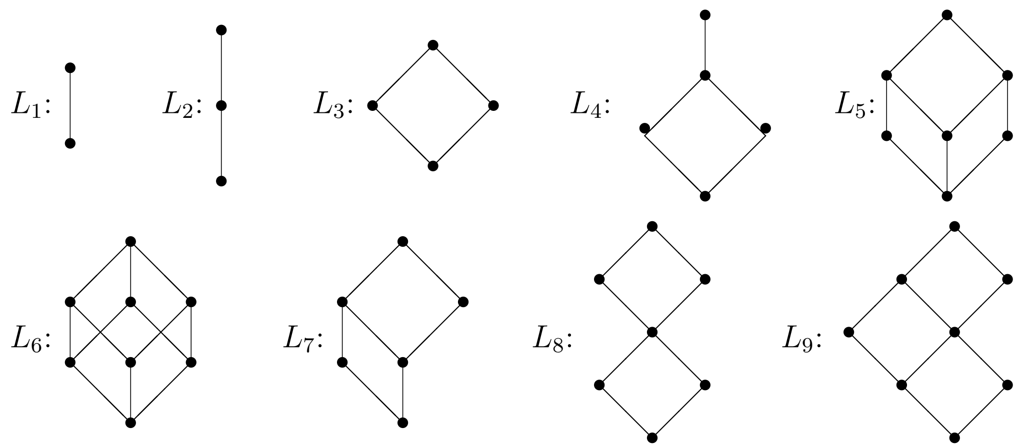
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
09/09/2016, Práctico $7\frac{1}{2}$: Álgebras de Boole, átomos y representación
Teorema de Birkhoff para reticulados distributivos

Objetivos. Repasar la noción de isomorfismo de reticulado. Comprender las noción de *átomos* identificando en varios reticulados aquellos elementos que lo son (en D_n, qué propiedad tienen los átomos?). Utilizar el teorema de representación para mostrar que un reticulado es o no un álgebra de Boole (¿Cuándo D_n es un álgebra de Boole?).



1. Determine cuáles de los siguientes isomorfismos valen.
$a)$ $D_{78} \cong D_{385}$. $b)$ $D_{12} \cong D_{18}$. $c)$ $D_{2310} \cong \mathcal{P}(\{a,b,c,d,e\})$. $d)$ $D_{90} \cong \mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$.
2. Considere los reticulados L_2, L_5 y M_3:
   - $a)$ Calcule el conjunto de átomos de cada reticulado.
   - $b)$ Para cada uno de esos reticulados, explique por qué **no** es un álgebra de Boole.
3. Para cada reticulado L de la figura:
   - $a)$ Halle $At(L)$;
   - $b)$ Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(At(L))$.
   - $c)$ Determine cuáles son álgebras de Boole.
4. Determine cuáles de los reticulados anteriores satisfacen las hipótesis del Teorema de Representación de Álgebras de Boole finitas y dé explícitamente el mapa F.

Objetivos: Comprender la noción de *elementos irreducibles* identificando en varios reticulados aquellos elementos que lo son. Entender la noción de *conjunto decreciente*; en particular, para P un poset, poder construir el poset de decrecientes de P. Utilizar el teorema de representación para mostrar que un reticulado es o no un reticulado distributivo.

1. Para cada reticulado L de la figura:
   - $a)$ Calcule el conjunto de elementos irreducibles, es decir $Irr(L)$.
   - $b)$ Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(Irr(L))$.
   - $c)$ Utilice el Teorema de Birkhoff para determinar si es distributivo o no.
2. Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 3 elementos irreducibles.
3. Dé explícitamente el iso entre $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ y $\mathcal{D}(P)$, para algún poset P cuyo universo es X.
4. Sea n producto de primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ¿cuáles son los elementos irreducibles de D_n?
5. Explique por qué no existe X tal que D_{60} sea isomorfo a $\mathcal{P}(X)$
6. ¿Es $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ subreticulado de $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$?
7. ¿Es N_5 subreticulado de D_{630}?
8. Sea $X = \{a,b,c\}$, dé explícitamente el iso entre $\mathbf{2}^3$ y $\mathcal{P}(X)$