

Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
17/08/2016, Práctico 1: Relaciones.

Objetivos.

En este práctico estudiaremos algunas propiedades asociadas a una relación y aprenderemos a decidir si una relación las satisface o no. En particular, nos interesan las propiedades que cumplen las relaciones de *equivalencia* y de *orden*.

Como resolver los ejercicios.

Para decidir si la relación R tiene cierta propiedad, lo que debemos hacer es:

1. saber cuál es la definición de la propiedad;
2. comprender qué significa esa propiedad en la relación R ;
3. mostrar que R satisface o no la propiedad.

¿Cómo podemos mostrar que una relación R sobre el conjunto A cumple con una propiedad o no? Supongamos que la propiedad que debemos demostrar es la *reflexividad*. En este caso debemos mostrar que para todo elemento $a \in A$, se da que $a \sim_R a$; si A es finito, podemos verificarlo examinando todos los pares de la relación.

Si A es infinito, lo que debemos hacer es tomar un elemento cualquiera $x \in A$ (del que solo suponemos que está en el conjunto) y dar un argumento que muestre que $(x, x) \in R$. Si no se puede construir esa prueba,¹ puede ser que haya un *contraejemplo*, es decir un elemento $z \in A$, tal que suponer $(z, z) \in R$ nos conduzca a una situación contradictoria. Si encontramos un contra-ejemplo, entonces la relación R **no** satisface la reflexividad.

Ejercicios.

1. ¿Qué propiedades debe cumplir una relación para ser de equivalencia?
2. Determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.
 - a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$
 - b) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
 - c) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
 - d) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$
 - e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$
 - f) $\{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5\}$
3. Determine si las siguientes relaciones sobre \mathbb{N} son reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas:

a) $(x, y) \in R$ sii $x^2 = y^2$

c) $(x, y) \in R$ sii $x \geq y$

b) $(x, y) \in R$ sii $x > y$

d) $(x, y) \in R$ sii $x \neq y$

4. Utilizando las respuestas del ejercicio (3) determine para cada caso si la relación es de equivalencia y/o de orden. Recuerde que una relación de *orden* debe ser reflexiva, antisimétrica, y transitiva.
5. Liste los pares de la relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ definida por la partición dada. También señale las clases de equivalencia $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$.

a) $\{1, 2\}, \{3, 4\}$

c) $\{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

d) $\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}$

6. Es habitual que hablemos de “Fulano es más joven o tiene la misma edad que Mengano” como si fuera un orden parcial, pero dado un grupo A de personas no siempre será así.
 - a) De un ejemplo, puede ser ficticio, de un conjunto de personas en los cuales esa relación no sea un orden parcial.
 - b) Explique qué propiedad falla para que sea un orden parcial.

¹Esto no es lo mismo que no encontrarla rápidamente!