Parte II: Lógica Proposicional

12 de octubre de 2016

Deducción natural

- La clase pasada introdujimos las reglas de inferencia que nos aseguran que si partimos de premisas válidas, entonces las conclusiones serán válidas.
- Luego mostramos ejemplos de cómo usarlas para construir derivaciones.
- Si bien no lo explicitamos, mencionamos que las pruebas podían ser vistas cómo árboles.
- A las hojas (que no estaban entre corchetes) les llamábamos hipótesis; y a la raiz, conclusión.

Ejemplo de función recursiva

- Definamos ahora mismo una función $hip\colon \mathcal{D} \to \mathcal{P}(Prop)$, que dada una derivación dice cuáles son las hipótesis no canceladas de la derivación:

$$hip(P) = \{P\} \qquad (Prop)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D_1}{\overset{\vdots}{P}} \qquad \overset{D_2}{\overset{\vdots}{Q}}}{P \wedge Q} \wedge I \right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\wedge I)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D}{\overset{\vdots}{P \wedge Q}}}{P} \wedge E \right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D}{\overset{\vdots}{P \wedge Q}}}{Q} \wedge E \right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función recursiva

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} & [P] \\ D & \vdots \\ & Q \end{matrix}}{P \to Q} \to I\right) = hip(D) \setminus \{P\} \qquad (\to I)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} D_1 & \vdots \\ & P \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 & \vdots \\ & P \to Q \end{matrix}}{Q} \to E\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\to E)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} D & \vdots \\ & \bot \end{matrix}}{P} \bot E\right) = hip(D) \qquad (\bot E)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} & [\neg P] \\ D & \vdots \\ & \bot \end{matrix}}{P} RAA\right) = hip(D) \setminus \{\neg P\} \qquad (RAA)$$

Derivaciones

- La clase pasada dijimos que Q *se derivaba de* $P_1, \ldots, P_n$ si existía una derivación con conclusión Q y sus hipótesis no canceladas estaban entre $P_1, \ldots, P_n$.
- Ahora que tenemos definidas formalmente las derivaciones y las nociones de hipótesis no canceladas (la función hip) y la conclusión ($concl$), podemos decirlo mejor.
- Para $\Gamma \subseteq Prop$ y $Q \in Prop$, decimos que Q *se deduce de* Γ si existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = Q$. La notación que utilizamos es la siguiente $\Gamma \vdash Q$.
- Si Q se deduce del conjunto vacío, $\emptyset \vdash Q$, entonces decimos que Q es un *teorema*. Si Q es un teorema nos ahorramos escribir el conjunto vacío: $\vdash Q$.

Derivaciones

- Si tenemos $\{P\} \vdash Q$, podemos construir una derivación $\vdash P \to Q$?
- Si tenemos $\{P \wedge Q\} \vdash R$, podemos construir una derivación $\vdash P \to (Q \to R)$?
- Este tipo de manipulaciones de derivaciones las podemos expresar como meta-teoremas: Si $\{P \wedge Q\} \vdash R$, entonces $\vdash P \to (Q \to R)$.

Más conectivos

- Puesto que el conjunto $\{\wedge, \rightarrow, \perp\}$ era funcionalmente completo podíamos contentarnos con esos conectivos.
- En esta clase daremos reglas de inferencia para: la doble implicación ($\leftrightarrow$), la disyunción ($\vee$) y la negación ($\neg$).

La doble implicación, introducción

- Si pensamos que la doble implicación $P \leftrightarrow Q$ se codifica como $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$, entonces no es sorprendente que la regla de introducción sea una combinación de las introducciones de $\to$ y de $\wedge$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[P] \\ \vdots \\ Q\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Q] \\ \vdots \\ P\end{array}}{P \leftrightarrow Q} \leftrightarrow I$$

- Recordemos que las hipótesis que podemos descargar son P en el sub-árbol de la izquierda y Q en el sub-árbol de la derecha.
- NO podemos descargar P en el sub-árbol de la derecha.
- NO podemos descargar Q en el sub-árbol de la izquierda.

La doble implicación, eliminación

- ¿Cuántas reglas habrá para eliminar la doble implicación?
- Puesto que lo codificamos como una conjunción, tendremos dos reglas de eliminación:

$$\frac{P \qquad P \leftrightarrow Q}{Q} \leftrightarrow E \qquad\qquad \frac{Q \qquad P \leftrightarrow Q}{P} \leftrightarrow E$$

La disyunción, introducción

- La disyunción es el dual de la conjunción: mientras que para introducir una conjunción necesitamos pruebas de ambos términos, para la disyunción nos alcanza con uno.
- Por ello tenemos dos reglas de introducción:

$$\frac{P}{P \vee Q}\,\vee I \qquad\qquad \frac{Q}{P \vee Q}\,\vee I$$

- ¿Cuántas reglas de eliminación de la disyunción habrá?

La disyunción, eliminación

- Teniendo en cuenta la dualidad entre $\wedge$ y $\vee$ es esperable tener una única regla de eliminación de la disyunción.
- Pero, cómo podemos usar una disyunción $P \vee Q$?
- Si suponiendo P podemos concluir R y si suponiendo Q también podemos concluir R, entonces podemos concluir R a partir de cualquiera de las dos:

$$\dfrac{P \vee Q \qquad \begin{matrix}[P]\\ \vdots \\ R\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[Q]\\ \vdots \\ R\end{matrix}}{R}\ \vee E$$

La disyunción, eliminación

- La regla de eliminación de la disyunción muestra cómo probar por casos R:
- por un lado podemos suponer P para probar R y por lo tanto en el segundo sub-árbol podemos descargar P;
- por otro lado podemos suponer Q para probar R, consecuentemente descargamos Q del tercer sub-árbol.
- PERO no podemos descargar NI P NI Q en el primer sub-árbol, no al menos al usar esta regla!

La negación

- Las reglas de la negación son muy fáciles de comprender si pensamos en cómo la habíamos definido en términos de $\rightarrow$ y $\bot$:
- Introducción:

$$\dfrac{\begin{matrix}[P] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg P}\,\neg I$$

- Eliminación:

$$\dfrac{P \qquad \neg P}{\bot}\,\neg E$$

Ejemplos de derivaciones con los nuevos conectivos

- $\{P \vee Q, \neg P\} \vdash Q$
- $\vdash P \vee \neg P$

Pispeando el futuro

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash Q$*, entonces* $\Gamma \models Q$.

- Recordemos que $\Gamma \vdash Q$ significa que existe una derivación D tal que $\mathit{hip}\,(D) \subseteq \Gamma$ y $\mathit{concl}\,(D) = Q$.
- El enunciado preciso que probaremos es:
  Para toda derivación D, si $\mathit{hip}\,(D) \subseteq \Gamma$ y $\mathit{concl}\,(D) = Q$, entonces $\Gamma \models Q$.
- Para la prueba utilizaremos inducción en derivaciones.

Pispeando el futuro: completitud

Teorema (Completitud)

Si $\Gamma \models Q$*, entonces* $\Gamma \vdash Q$*.*

- Como $\Gamma \models Q$, entonces para toda f de Γ, $[\![Q]\!]_f = 1$;
- por lo tanto no existe f de $\Gamma \cup \{\neg Q\}$.
- Si no existe f de Δ, entonces $\Delta \vdash \bot$.
- Con el punto anterior y RAA podemos concluir $\Gamma \vdash Q$.