# Parte II: Lógica Proposicional

27 de septiembre de 2017

# El conjunto *Prop*

- Asumimos un conjunto numerable $\mathcal{V}$ de variables proposicionales y definimos los átomos como $At = \mathcal{V} \cup \{\bot\}$.
- Las proposiciones eran ciertas palabras sobre $\Sigma = At \cup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{(,)\}$.
- Al conjunto $Prop$ lo definimos inductivamente:

  $\phi \in At$ Si $\phi \in At$, entonces $\phi \in Prop$;

  $(\neg\,\phi)$ Si $\phi \in Prop$, entonces $(\neg\,\phi) \in Prop$;

  $(\phi \vee \psi)$ Si $\phi \in Prop$ y $\psi \in Prop$, entonces $(\phi \vee \psi) \in Prop$.

  $(\phi \wedge \psi)$ Si $\phi \in Prop$ y $\psi \in Prop$, entonces $(\phi \wedge \psi) \in Prop$.

  $(\phi \rightarrow \psi)$ Si $\phi \in Prop$ y $\psi \in Prop$, entonces $(\phi \rightarrow \psi) \in Prop$.

  $(\phi \leftrightarrow \psi)$ Si $\phi \in Prop$ y $\psi \in Prop$, entonces $(\phi \leftrightarrow \psi) \in Prop$.

# Recursión en *Prop*

- Podemos definir funciones recursivamente:
- Para definir $f\colon Prop \to X$ debemos definir:

$$f(\phi) = \begin{cases} x_i & \text{si } \phi = p_i \\ y & \text{si } \phi = \bot \end{cases}$$

- Y tenemos varios casos recursivos, uno para cada conectivo; en el caso de la negación:

$$f((\neg\phi)) = \dots f(\phi) \dots$$

- Para las fórmulas de la forma $(\phi \,\square\, \psi)$, podemos utilizar la llamada recursiva tanto en $\phi$ como en $\psi$:

$$f((\phi \,\square\, \psi)) = \dots f(\phi) \dots f(\psi) \dots$$

# Recursión, ejemplos

- Cantidad de conectivos en una proposición.
- Cantidad de símbolos "(" y ")" en una proposición:
- Sustitución del símbolo $p_i$ por la proposición $\psi$:

$$
\begin{aligned}
- \, [\psi/p_i] \colon \mathit{Prop} &\to \mathit{Prop} \\
p_j \, [\psi/p_i] &= \begin{cases} \psi & \text{si } i = j \\ p_j & \text{si } i \neq j \end{cases} \\
\bot \, [\psi/p_i] &= \bot \\
(\neg \, \phi) \, [\psi/p_i] &= (\neg \; \phi \, [\psi/p_i]) \\
(\phi \, \square \, \psi) \, [\psi/p_i] &= (\phi \, [\psi/p_i] \; \square \; \psi \, [\psi/p_i])
\end{aligned}
$$

# Inducción en sub-fórmulas

- Podemos probar propiedades sobre $Prop$ utilizando *inducción* sobre proposiciones.
- Para probar que toda $\phi \in Prop$ satisface un predicado $A$, alcanza con probar:

$$\begin{array}{rl} \phi \in At & A(\phi)\text{, para todo } \phi \in At; \\ (\neg\, \phi) & \text{Si } A(\phi)\text{, entonces } A((\neg\, \phi)); \\ (\phi \,\square\, \psi) & \text{Si } A(\phi) \text{ y } A(\psi)\text{, entonces } A((\phi \,\square\, \psi)). \end{array}$$

- La clase pasada utilizamos este principio para probar: "para toda $\phi \in Prop$, $paren(\phi) = 2 * con(\phi)$".

# Semántica

- Las proposiciones representan afirmaciones, alcanza con utilizar $\mathbb{2}$.
- Por ejemplo, establecimos que $\perp$ representaba la afirmación falsa.
- Para otras, *hoy llueve* (representada por alguna $p_i$) no podemos fijar su valor de verdad de una vez y para siempre.
- ¿Cuál es el valor de $(\neg\, p_1)$?

| $p_1$ | $(\neg\, p_1)$ |
|---|---|
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $0$ |

- En general, el valor de $(\phi \,\Box\, \psi)$, dependerá del valor de $\phi$ y del de $\psi$.

# Tabla de verdad

- En una tabla de verdad esa dependencia se hace patente.
- Cada línea de la tabla de verdad muestra una asignación de valores a las variables proposicionales:

| $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $(\neg p_0)$ | $((\neg p_0) \wedge p_1)$ | $(((\neg p_0) \wedge p_1) \to p_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

# Completitud funcional

- Una función $\mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ puede describirse con una tabla de verdad.
- Dada una función $F\colon \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ existe una proposición $\phi$ tal que la tabla de verdad de $\phi$ sea justamente la función $F$?

| $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $F(p_0, p_1, p_2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Idea: Disyunción de los *minterms* de las líneas con $1$ en $F(p_0, p_1, p_2)$.

# Completitud funcional

- Sólo utilizamos $\neg$, $\wedge$, $\vee$.
- Un conjunto de conectivos es *funcionalmente completo*, si toda función $\mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ se puede describir con una proposición que sólo utilice esos conectivos.
- Si sabemos que un conjunto es funcionalmente completo, entonces podemos probar que otro conjunto lo es, utilizando equivalencias lógicas.
- Ejemplo, como $[\![(\phi \vee \psi)]\!]_f = [\![((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))]\!]_f$, entonces $\{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo.

# Semántica

- Los valores de las columnas que no son variables queda determinada unívocamente de las anteriores.
- Una *asignación* es una función $f : \mathcal{V} \to \mathbb{2}$.
- En la tabla de verdad, ¿listamos todas las asignaciones?
- Más adelante veremos por qué alcanza con algunas asignaciones.

# Semántica

- Dada una asignación $f$, el valor de verdad de una proposición se define recursivamente:

$$
\begin{aligned}
[\![-]\!]_f &: Prop \to \mathbb{2} \\
[\![p_i]\!]_f &= f\, p_i \\
[\![\bot]\!]_f &= 0 \\
[\![(\neg\, \phi)]\!]_f &= 1 - [\![\phi]\!]_f \\
[\![(\phi \wedge \psi)]\!]_f &= \text{mín}([\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f) \\
[\![(\phi \to \psi)]\!]_f &= \text{máx}(1 - [\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f) \\
[\![(\phi \vee \psi)]\!]_f &= \text{máx}([\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f) \\
[\![(\phi \leftrightarrow \psi)]\!]_f &= 1 - (\text{máx}([\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f) - \text{mín}([\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f))
\end{aligned}
$$

# Coincidencia

**Teorema (de coincidencia)**

*Si* $f, f' \colon \mathcal{V} \to \mathbb{2}$ *coinciden en las variables que ocurren en* $\phi$, *entonces* $[\![\phi]\!]_f = [\![\phi]\!]_{f'}$.

Por inducción en $\phi$.

**Lema (de sustitución)**

*Sea* $f$ *una asignación, tal que* $[\![\psi_1]\!]_f = [\![\psi_2]\!]_f$. *Entonces* $[\![\phi\,[\psi_1/p_i]]\!]_f = [\![\phi\,[\psi_2/p_i]]\!]_f$.

Por inducción en sub-fórmulas. En el pizarrón.

# Validez

- La asignación $f$ *satisface* $\phi$ si $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- $\phi$ es una *tautología* (ó es *válida*) si es satisfecha por toda asignación.
- Sea $\Gamma \subseteq Prop$, decimos que $f$ es un *modelo* de $\Gamma$, si para toda $\phi \in \Gamma$, $f$ satisface $\phi$.
- ¿Existe algún modelo de $Prop$?

# Consecuencia lógica

- Si $\phi$ es una tautología, escribimos $\models \phi$.
- Decimos que $\phi$ es *consecuencia lógica* de $\Gamma$ si todo modelo de $\Gamma$ satisface $\phi$. Lo escribimos $\Gamma \models \phi$.
- Como toda asignación es un modelo de $\emptyset$, entonces $\models \phi$ es lo mismo que $\emptyset \models \phi$.

# Consecuencia lógica

- $\models (\phi \to \phi)$.
- Si $\phi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \models \phi$.
- $\{\phi, (\phi \to \psi)\} \models \psi$.
- $\not\models p_1$.

**Teorema (de sustitución)**

*Si* $\models (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$, *entonces* $\models (\phi\,[\psi_1/p_i] \leftrightarrow \phi\,[\psi_2/p_i])$.