Parte II: Lógica Proposicional

29 de septiembre de 2017

El conjunto $Prop$

- Hace un par de semanas definimos la sintaxis de la lógica proposicional, el conjunto $Prop$.
- Definición de funciones por recursión.
- Prueba de propiedades sobre $Prop$ utilizando inducción.

Semántica

- Las asignaciones son funciones en $\mathcal{V} \to \mathbb{2}$.
- Dada $f\colon \mathcal{V} \to \mathbb{2}$, tenemos $[\![-]\!]_f\colon Prop \to \mathbb{2}$.
- Una proposición ϕ es *tautología* si para toda asignación f, $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- Una asignación f es un *modelo* de $\Gamma \subseteq Prop$, si para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- Decimos que ϕ es *consecuencia lógica* de Γ, $\Gamma \models \phi$, si para todo modelo f de Γ, se da que $[\![\phi]\!]_f = 1$.

y los razonamientos correctos?

- La primera clase dijimos que la lógica es el estudio de los razonamientos lógicos.
- Pero hasta ahora no introdujimos ningún mecanismo para deducir conclusiones válidas a partir de premisas válidas.
- Esta es nuestra tarea ahora.

Inferencia

- Un razonamiento correcto es aquel que partiendo de ciertas *hipótesis* produce nuevos conocimientos.
- Para asegurarnos que las conclusiones son válidas debemos restringir las formas (las inferencias) en que producimos las conclusiones a partir de las premisas.
- Lo que vamos a dar a continuación es una serie de *reglas de inferencia* que nos aseguran que los razonamientos hechos usando esas reglas (y solo esas) son correctos.
- Por ahora nos vamos a restringir a los siguientes conectivos: $\wedge, \rightarrow, \perp$.
- Y establecemos que la conjunción tiene mayor precedencia que la implicación.

Reglas de inferencia

- Representaremos gráficamente las reglas de la siguiente manera:

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2 \qquad \dots \qquad \phi_n}{\psi}\,\text{nombre}$$

- Recordemos que tanto las ϕ_i como ψ son metavariables que pueden ser reemplazadas por cualquier proposición.

Reglas para la Conjunción

- Si conocemos (las asumimos como hipótesis o ya tenemos una prueba) ϕ y ψ, entonces podemos concluir $\phi \wedge \psi$.
- La regla formal se llama introducción de la conjunción:

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I$$

- Un ejemplo concreto del uso de esta regla es la siguiente prueba:

$$\frac{p_1 \qquad p_2}{p_1 \wedge p_2} \wedge I$$

- ¿Nos dice esa prueba que $p_1 \wedge p_2$ es válido?

Reglas para la Conjunción

- De saber $\phi \wedge \psi$ podemos deducir tanto ϕ como ψ.
- Tenemos entonces dos reglas para utilizar el conocimiento de una conjunción.
- La primera regla se llama eliminación de la conjunción:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E$$

- La segunda regla, que la llamamos con el mismo nombre, es:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

Ejemplos

- ¿Podemos derivar la validez de χ a partir de la validez de $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$?
- Si decimos que sí, debemos poder construir una prueba, una *derivación*, donde podemos usar varias veces las reglas de inferencia:

$$\cfrac{\cfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\psi \wedge \chi}\wedge E}{\chi}\wedge E$$

- A partir de ahora, usaremos la expresión existe una *derivación de* χ *a partir de* $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$.

Ejemplos

- ¿Podemos construir una derivación de $\phi \wedge (\psi \to \psi)$ a partir de ϕ y $(\psi \to \psi) \wedge \chi$? (Notar que tenemos varias premisas)

$$\dfrac{\phi \qquad \dfrac{(\psi \to \psi) \wedge \chi}{\psi \to \psi}\wedge E}{\phi \wedge (\psi \to \psi)}\wedge I$$

- Tanto en esta prueba como en la anterior, utilizamos la conclusión de una prueba como premisa para el uso de otra regla.

Premisas y conclusión

- Llamamos *premisas* a todas las proposiciones que no fueron obtenidas como conclusión de una prueba.
- En el último ejemplo, las premisas son ϕ y $(\psi \to \psi) \land \chi$.
- Llamamos *conclusión* a la proposición que está en la raíz del árbol.
- A veces queremos referirnos a una derivación de ψ a partir de la premisa ϕ, entre otras:

$$\begin{array}{c} \phi \\ \vdots\, D \\ \psi \end{array}$$

- En este caso D es el nombre de la derivación.
- Entre las premisas de D está ϕ; esto significa que esa proposición se ha utilizado 0, 1 o muchas veces (sin necesidad de tener una prueba con conclusión ϕ).

Implicación

- Si D es una derivación de ψ a partir de ϕ, entonces D debería contar como una derivación de $\phi \to \psi$.
- Pero cuando utilizamos la implicación (pensemos en el uso de "si ..., entonces ..."), queremos decir "si tuviéramos una prueba de ϕ".
- No queremos obligarnos a tener una prueba de ϕ, al menos hasta que querramos usar la implicación.
- Vemos entonces que cuando introducimos la implicación, quitamos la carga de la prueba sobre el antecedente.

Implicación

- Formalmente la regla de introducción de la implicación es:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi} \to I$$

- Aquí hay una diferencia con las anteriores reglas porque encorchetamos hojas donde esté ϕ, si queremos.
- Esa es la manera en que indicamos que *descargamos* (o *cancelamos*) la hipótesis ϕ.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \psi]_1}{\psi} \wedge E \qquad \dfrac{[\phi \wedge \psi]_1}{\phi} \wedge E}{\dfrac{\psi \wedge \phi}{(\phi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \phi)} \to I_1} \wedge I$$

- Como podemos utilizar varias veces la regla $\to I$, marcamos con un sub-índice aquellas hipótesis que cancelamos con cada uso de la regla.

Implicación

- La regla de eliminación de la implicación (¿cómo puedo usar una implicación?) es la conocida *modus ponens*:

$$\dfrac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E$$

- Si definimos $\neg\phi$ como abreviatura de $\phi \to \bot$, entonces:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]_3 \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \neg\psi}{\bot} \to E}{\neg\phi} \to I_3$$

- En esta derivación, tenemos que las hipótesis no canceladas son $\phi \to \psi$ y $\neg\psi$.
- Pero podemos continuar con la derivación y cancelar todas las hipótesis.

Ejemplo

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]_3 \qquad [\phi \to \psi]_1}{\psi} \to E \qquad [\neg\psi]_2}{\bot} \to E}{\neg\phi} \to I_3}{\neg\psi \to \neg\phi} \to I_2}{(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)} \to I_1
$$

Bottom

- Para $\perp$ no tenemos regla de introducción. ¿Por qué?
- Sin embargo, siempre que tengamos una prueba de $\perp$, podemos concluir lo que se nos antoje: "ex falso quodlibet".

$$\frac{\perp}{\phi}\perp E$$

- Ejemplo, recordemos que $\neg\phi$ es $\phi \to \perp$:

$$\cfrac{\cfrac{\phi \qquad \neg\phi}{\perp} \to E}{\psi} \perp E$$

- Es decir, podemos construir una derivación de ψ a partir de ϕ y $\neg\phi$.