Parte II: Lógica Proposicional

4 de octubre de 2017

Deducción natural

- La clase pasada introdujimos las reglas de inferencia que nos aseguran que si partimos de premisas válidas, entonces las conclusiones serán válidas.
- Si bien no lo explicitamos, mencionamos que las pruebas podían ser vistas cómo árboles.
- A las hojas (que no estaban entre corchetes) les llamábamos hipótesis; y a la raiz, conclusión.

Reducción al absurdo

- El uso habitual de reducción al absurdo es el siguiente: "para probar ϕ, asumí $\neg\phi$ y llegá a una conclusión $\perp$".
- La regla "reducción al absurdo" entonces tendrá como conclusión a ϕ y podremos cancelar todas las veces que queramos a $\neg\phi$:

$$\begin{array}{c} [\neg\phi] \\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{\phi}\ RAA \end{array}$$

Ejemplos

En el pizarrón.

Derivaciones

- Decimos que ψ *se derivaba de* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ si existe una derivación con conclusión ψ y sus hipótesis no canceladas están entre $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

- Para $\Gamma \subseteq Prop$ y $\psi \in Prop$, decimos que ψ *se deduce de* Γ si existe una derivación D tal que las hipótesis están contenidas en Γ y su conclusión es ψ. La notación que utilizamos es la siguiente $\Gamma \vdash \psi$.

- Si ψ se deduce del conjunto vacío, $\emptyset \vdash \psi$, entonces decimos que ψ es un *teorema*. Si ψ es un teorema nos ahorramos de escribir el conjunto vacío: $\vdash \psi$.

Derivaciones

- Si tenemos $\{\phi\} \vdash \psi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to \psi$?
- Si tenemos $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \chi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$?
- Este tipo de manipulaciones de derivaciones las podemos expresar como meta-teoremas: Si $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \chi$, entonces $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$.

El conjunto de derivaciones

Definiremos el conjunto de derivaciones, $\mathcal{D}$, como el menor conjunto que satisface (en varias filminas):

$(Prop)$ Si $\phi \in Prop$, entonces $\phi \in \mathcal{D}$.

El conjunto de derivaciones

$(\wedge I)$ Si $\begin{array}{cc} D_1 & \vdots \\ & \phi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{cc} D_2 & \vdots \\ & \psi \end{array} \in \mathcal{D}$,

entonces $$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & \vdots \\ & \phi \end{array} \qquad \begin{array}{cc} D_2 & \vdots \\ & \psi \end{array}}{\phi \wedge \psi} \wedge I \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

$(\wedge E)$ Si $\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{array} D \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{array} D}{\phi} \wedge E \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to I)$ Si $\begin{array}{cc} & \phi \\ & \vdots \\ D & \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{cc} & [\phi] \\ & \vdots \\ D & \psi \end{array}}{\phi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to E)$ Si $\begin{array}{cc} D_1 & \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array} \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{cc} D_2 & \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \to \psi \end{array} \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} D_2 & \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \to \psi \end{array} \end{array}}{\psi} \to E \quad \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

$(\perp E)$ Si $\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \perp \end{array}$ $\in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi}\,\perp E$ $\in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

(RAA) Si $\begin{array}{cc} & \neg\phi \\ D & \vdots \\ & \bot \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\begin{array}{cc} & [\neg\phi] \\ D & \vdots \\ & \dfrac{\bot}{\phi}\ RAA \end{array} \in \mathcal{D}$

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- Si quisiéramos justificar que un árbol está en $\mathcal{D}$, entonces deberíamos mostrar cómo lo vamos construyendo a partir del uso de la regla $Prop$, utilizando las cláusulas que dimos recién.

- Eso es demasiado engorroso y no lo haremos explícitamente, pero tengamos en cuenta que podríamos hacerlo.

- Pero entonces, para qué introducir $\mathcal{D}$? ¿Qué herramientas tenemos ahora a nuestra disposición?

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- El mismo cuentito de siempre: por un lado tenemos un principio de definición de funciones por recursión.
- Por otro lado, podemos usar inducción *en subderivaciones* para probar que cierta propiedad es cierta para toda derivación.
- ¿Para qué podemos usar ese principio de inducción en subderivaciones? Para probar la corrección: es decir fundamentar nuestro eslogan de que las reglas de inferencia preservan la validez (que si lo recuerdan lo denotábamos como $\models$).

Ejemplo de función (no tan) recursiva

- Definamos ahora mismo una función $concl \colon \mathcal{D} \to Prop$, que dada una derivación dice cuál es la conclusión de esa derivación:

$$concl(\phi) = \phi \qquad (Prop)$$

$$concl\left(\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \vdots \\ \phi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \vdots \\ \psi \end{matrix}}{\phi \wedge \psi}\,\wedge I\right) = \phi \wedge \psi \qquad (\wedge I)$$

$$concl\left(\dfrac{\begin{matrix} D \\ \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{matrix}}{\phi}\,\wedge E\right) = \phi \qquad (\wedge E)$$

$$concl\left(\dfrac{\begin{matrix} D \\ \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{matrix}}{\phi}\,\wedge E\right) = \psi \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función (no tan) recursiva (cont)

$$concl\left(\begin{array}{c}[\phi]\\ D \quad \vdots \\ \dfrac{\psi}{\phi \to \psi} \to I\end{array}\right) = \phi \to \psi \qquad (\to I)$$

$$concl\left(\begin{array}{c}D_1 \quad \vdots \qquad D_2 \qquad \vdots \\ \dfrac{\phi \qquad\qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E\end{array}\right) = \psi \qquad (\to E)$$

$$concl\left(\begin{array}{c}D \quad \vdots \\ \dfrac{\bot}{\phi} \bot E\end{array}\right) = \phi \qquad (\bot E)$$

$$concl\left(\begin{array}{c}[\neg\phi]\\ D \quad \vdots \\ \dfrac{\bot}{\phi} RAA\end{array}\right) = \phi \qquad (RAA)$$

Ejemplo de función recursiva

- Definamos ahora mismo una función $hip\colon \mathcal{D} \to \mathcal{P}(Prop)$, que dada una derivación dice cuáles son las hipótesis no canceladas de la derivación:

$$hip(\phi) = \{\phi\} \qquad (Prop)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} D_1 & \vdots \\ & \phi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 & \vdots \\ & \psi \end{matrix}}{\phi \wedge \psi} \wedge I\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\wedge I)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} D & \vdots \\ & \phi \wedge \psi \end{matrix}}{\phi} \wedge E\right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} D & \vdots \\ & \phi \wedge \psi \end{matrix}}{\phi} \wedge E\right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función recursiva

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ D\quad\vdots\\ \psi\end{array}}{\phi\to\psi}\to I\right) = hip(D)\setminus\phi \qquad (\to I)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}D_1\quad\vdots\\ \phi\end{array}\qquad \begin{array}{c}D_2\quad\vdots\\ \phi\to\psi\end{array}}{\psi}\to E\right) = hip(D_1)\cup hip(D_2) \qquad (\to E)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}D\quad\vdots\\ \perp\end{array}}{\phi}\perp E\right) = hip(D) \qquad (\perp E)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi]\\ D\quad\vdots\\ \perp\end{array}}{\phi}RAA\right) = hip(D)\setminus\{\neg\phi\} \qquad (RAA)$$

Derivaciones

- Decimos que ψ *se derivaba de* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ si existe una derivación con conclusión ψ y sus hipótesis no canceladas están entre $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

- Para $\Gamma \subseteq Prop$ y $\psi \in Prop$, decimos que ψ *se deduce de* Γ si existe una derivación D tal que las hipótesis están contenidas en Γ y su conclusión es ψ. La notación que utilizamos es la siguiente $\Gamma \vdash \psi$.

- Si ψ se deduce del conjunto vacío, $\emptyset \vdash \psi$, entonces decimos que ψ es un *teorema*. Si ψ es un teorema nos ahorramos de escribir el conjunto vacío: $\vdash \psi$.