Parte II: Lógica Proposicional

11 de octubre de 2017

Semántica

- Una asignación $f : \mathcal{V} \to \mathbb{2}$, induce la semántica $[\![-]\!]_f : Prop \to \mathbb{2}$.
- La asignación f satisface la fórmula ϕ si $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- f es modelo de $\Gamma \subseteq Prop$, si para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- ϕ es consecuencia lógica de Γ si todo modelo de Γ satisface ϕ.

Deducción natural

- Construcción de pruebas usando reglas de inferencias.
- Definición por inducción del conjunto $\mathcal{D}$ de derivaciones.
- ϕ se deduce de Γ, $\Gamma \vdash \phi$, si existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = \phi$.
- Pero, realmente las reglas nos permiten concluir proposiciones verdaderas a partir de hipótesis verdaderas?

Derivabilidad y contra-ejemplos

- De los siguientes pares de afirmaciones ¿cuáles son correctos?

$$\{p_0, p_1\} \vdash p_2 \qquad \{p_0, p_1\} \nvdash p_2$$

$$\vdash \bot \qquad \nvdash \bot$$

- Y de estos pares que siguen, cuáles son correctos?

$$\{p_0, p_1\} \models p_2 \qquad \{p_0, p_1\} \not\models p_2$$

$$\models \bot \qquad \not\models \bot$$

Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?
- Las segundas afirmaciones (aquellas que hablan de modelos) las podemos comprobar rápidamente construyendo las tablas de verdad.
- En cambio, para verificar la validez de una las primeras afirmaciones debemos o bien construir una derivación,
- o bien mostrar que no existe ninguna derivación con la conclusión esperada y las hipótesis permitidas.
- Por ejemplo, como podemos estar seguros que no podemos concluir $\perp$ utilizando una regla de eliminación o RAA?

Corrección

- Como la validez de las fórmulas está dada por su semántica, entonces podemos utilizar la noción de $\models$ para expresar la corrección.
- Una derivación $D \in \mathcal{D}$ con $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = \phi$ es *correcta* si todo modelo de Γ satisface ϕ.
- Nuestro trabajo será mostrar que toda derivación es correcta.

Derivabilidad y contra-ejemplos

- Volviendo a las pregunta del principio, suponiendo corrección, cómo podemos usar

$$\{p_0, p_1\} \not\models p_2 \qquad \text{y} \qquad \not\models \bot$$

para concluir

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \qquad \text{y} \qquad \not\vdash \bot$$

- Si suponemos que existe una derivación para $\{p_0, p_1\} \vdash p_2$, entonces para toda asignación f de $\{p_0, p_1\}$, tendríamos $[\![p_2]\!]_f = 1$.
- Sin embargo la siguiente asignación es un contraejemplo:

$$\begin{aligned} f\,p_0 &= 1 \\ f\,p_1 &= 1 \\ f\,p_j &= 0 \qquad \text{para } j > 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, estamos en una contradicción y la derivación que supusimos no puede existir.

Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado A sobre derivaciones.

- Sea $D \begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array}$, entonces $A(D)$ vale si y solo si

  "para todo Γ tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models \phi$".

- Por ejemplo, si D es la derivación $\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E$, entonces $A(D)$ vale.

  Tomemos Γ tal que $\phi \wedge \psi \in \Gamma$, comprobemos $\Gamma \models \phi$.

- Para ello tomemos un modelo f de Γ y verifiquemos $[\![\phi]\!]_f = 1$.

- Como f es modelo Γ y $\phi \wedge \psi \in \Gamma$, entonces $[\![\phi \wedge \psi]\!]_f = 1$, por lo tanto $[\![\phi]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección

Teorema

Si $\Gamma \vdash Q$, *entonces* $\Gamma \models Q$.

$(Prop)$ Sea D la derivación P y sea $\{P\} \subseteq \Gamma$, es inmediato $\Gamma \models P$.

$(\wedge E)$ Sea D la derivación

$$D' \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P \wedge Q\end{array}}{P}\,\wedge E$$

Puesto que D' es la subderivación de D, entonces podemos asumir la hipótesis inductiva para D':

para todo $\Gamma' \supseteq hip(D')$, se da $\Gamma' \models P \wedge Q$.

Para mostrar $A(D)$, tomamos $\Gamma \supseteq hip(D)$ y probamos $\Gamma \models P$. Sea f una asignación arbitraria de Γ, veamos $[\![P]\!]_f = 1$.

Como $hip(D) = hip(D')$, para Γ tenemos $\Gamma \models P \wedge Q$, es decir $[\![P \wedge Q]\!]_f = 1$. De lo cual concluimos $[\![P]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

$(\wedge I)$ Sea D la derivación $\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 \begin{array}{c}\vdots \\ P\end{array} & D_2 \begin{array}{c}\vdots \\ Q\end{array}\end{array}}{P \wedge Q} \wedge I$, veamos $A(D)$.

Como antes, aumimos la h.i. tanto para D_1

para todo $\Gamma_1 \supseteq hip(D_1)$, $\Gamma_1 \models P$

como para D_2

para todo $\Gamma_2 \supseteq hip(D_2)$, $\Gamma_2 \models Q$

Sea $\Gamma \supseteq hip(D)$ y sea f una asignación de Γ. Como $hip(D_i) \subseteq hip(D) \subseteq \Gamma$, tenemos, aplicando la h.i. en D_1, $[\![P]\!]_f = 1$ y, análogamente usando la h.i. en D_2 sabemos $[\![Q]\!]_f = 1$. Por lo tanto, tenemos $[\![P \wedge Q]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

$(\to I)$ Sea D la derivación
$$\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots\\ D' \quad Q\end{array}}{P \to Q}\to I$$
.

En este caso asumimos que la h.i. vale para D':

para todo $\Gamma' \supseteq hip(D_1)$, $\Gamma' \models Q$.

Tomemos $\Gamma \supseteq hip(D)$ y f una asignación de Γ, probemos $[\![P \to Q]\!]_f = 1$, es decir $\max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = 1$.

Como $hip(D) = hip(D') \setminus \{P\}$, que f sea de Γ no nos dice nada sobre el valor de $[\![P]\!]_f$. Si $[\![P]\!]_f = 0$, entonces $\max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = \max(1 - 0, [\![Q]\!]_f) = 1$.

El otro caso es si $[\![P]\!]_f = 1$; pero ahora f es una asignación de $\Gamma \cup \{P\}$; usando la hipótesis inductiva en D', con $\Gamma' = \Gamma \cup \{P\}$, deducimos $[\![Q]\!]_f = 1$. De lo cual concluimos $\max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = \max(1 - [\![P]\!]_f, 1) = 1$.

Teorema de corrección, cont.

$(\to E)$ Sea D la derivación $\dfrac{\begin{matrix} & \vdots \\ D_1 & P\end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \vdots \\ D_2 & P \to Q\end{matrix}}{Q} \to E$.

En este caso asumimos la h.i. sobre D_1 y sobre D_2.

Sea $\Gamma \supseteq hip(D)$, entonces $\Gamma \supseteq D_i$. Sea f una asignación de Γ; por h.i., entonces $[\![P]\!]_f = 1$ y también $[\![P \to Q]\!]_f = 1$.

Es decir $1 = \max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = \max(0, [\![Q]\!]_f)$; por lo tanto, $[\![Q]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

(RAA) Sea D la derivación $\begin{array}{c} [\neg P] \\ D' \vdots \\ \dfrac{\bot}{P}\, RAA \end{array}$.

Ahora podemos asumir la h.i. para D':

para todo $\Gamma' \supseteq hip(D')$, $\Gamma' \models \bot$!

Sea $\Gamma \supseteq hip(D') \setminus \{\neg P\}$ y sea f una asignación de Γ. Veamos $[\![P]\!]_f = 1$.

Supongamos que para toda f de Γ, tenemos $[\![P]\!]_f = 0$. Es decir, $[\![\neg P]\!]_f = 1$; por lo tanto f es de $\Gamma \cup \{\neg P\}$.

Eso nos permite utilizar la h.i. sobre D' y concluir $[\![\bot]\!]_f = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se debe dar $[\![P]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

$(\perp E)$ Sea D la derivación $D' \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \perp\end{array}}{P}\,\perp E$

En este caso asumimos la h.i. sobre D'.

Sea $\Gamma \supseteq hip(D)$, entonces $\Gamma \supseteq hip(D')$. Sea f una asignación de Γ; por h.i., entonces $[\![\perp]\!]_f = 1$.

Lo último es absurdo y facilmente podemos concluir $[\![P]\!]_f = 1$.

Repaso

- Ahora podemos probar $\nvdash \bot$: Supongamos que $\vdash \bot$, entonces para toda asignación f tenemos $[\![\bot]\!]_f = 1$ por corrección. Pero eso es absurdo; por lo tanto no existe derivación con conclusión $\bot$ y todas sus hipótesis canceladas.
- El meta-teorema de corrección nos asegura que todo teorema es una tautología.
- Pero... sucederá lo recíproco? Es decir, podremos derivar todas las tautologías?
- En términos más generales: si $\Gamma \models P$, entonces $\Gamma \vdash P$?
- Es decir, se podrán hacer *todas* las derivaciones de premisas válidas a conclusiones válidas.